

九州大学 工学部 正員 上田 昇比古
同 正員 神野 健二
同 学正員 藤野 和徳
同 学正員 佐々野 尚文

1. まえがき 地下密度流の現在までの解については、多いが淡水境界面上での、分散、混合を無視した場合ととり扱っている。しかし、塩水楔のようにその混合面の長さが大きい場合や砂粒径が大きくなった場合には、淡水境界面での混合は無視できないであろうし、これは地下水の劣化(塩水化)の原因にもなると考えられる。このため混合の原因となる主要因として①砂粒径 ②空げき率 ③透水係数 ④密度差 を物理特性量として解がえられることが望ましいと考える。本報では図-1のようになりに深い場所に設置された真水のポイントソースから流出した真水が上部に上昇してゆくとき、周囲の海水との間に、分散、混合が行なわれた場合の解析を行い、浸透領域内の密度、流速分布などの検討を行った。

2. 基礎方程式および解の誘導

$$\text{連続の式 } \partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0 \quad \text{----- (1)}$$

$$\text{静水圧分布を仮定したダルシーの式は近似的に } \lambda v = k(s_s - s) / \rho_f \quad \text{----- (2)}$$

$$\text{分散方程式 } \partial \{u(s_s - s)\} / \partial x + \partial \{v(s_s - s)\} / \partial y = \partial \{ \frac{\rho}{16} D v \frac{\partial}{\partial x} (s_s - s) \} / \partial x \quad \text{----- (3)}$$

s : 密度 ρ_f : 淡水の密度 ρ_s : 塩水の密度 u : x 方向の実流速 v : y 方向の実流速 λ : 空げき率 k : 透水係数 D : 砂粒径 なお $\frac{\rho}{16} D v$ は *Soffman* による細管モデルの統計理論による分散係数である。分散係数には、武内、*Narleman* によるものがあるが、本報においては密度流の物理特性量である砂粒径を含んだ *Soffman* による値を用いた。いま各水深の垂直方向の流速と密度の分布には相似則がなりつと仮定し、 v , $s_s - s$ をべき級数で表わし、

$$v = v_m(y) f(\eta) \quad \text{----- (4)} \quad s_s - s = s'_m(y) f(\eta) \quad \text{----- (5)} \quad \eta = x / R(y) \quad \text{----- (6)} \quad f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \eta^{2n} \quad \text{----- (7)}$$

とする。ここで $s'_m = s_s - s_m$ 、また $v_m(y)$, $s'_m(y)$ は y 軸上での流速、密度である。(2)式に(4),(5)式を代入して、

$$v = \frac{k}{\rho_f \lambda} s'_m(y) \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \eta^{2n} \quad \text{----- (8)}$$

流速 u の境界条件 $u(0, y) = 0$ を用いて、(1),(8)式より

$$u = - \frac{k}{\rho_f \lambda} \left[\frac{d s'_m(y)}{dy} R(y) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} a_{2n} \eta^{2n+1} - s'_m(y) \frac{d R(y)}{dy} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{2n+1} a_{2n} \eta^{2n+1} \right] \quad \text{----- (9)}$$

(5),(8),(9)式より $\partial v / \partial x$, $\partial s / \partial x$, $\partial s / \partial y$, $\partial^2 s / \partial x^2$ を求め、(3)式に代入すると、

$$\frac{d s'_m(y)}{dy} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2l}{2n+1} - 1 \right) a_{2n} a_{2l} \eta^{2(l+n)} - \frac{s'_m(y)}{R(y)} \frac{d R(y)}{dy} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{4nl}{2n+1} - 2l \right) a_{2n} a_{2l} \eta^{2(l+n)} = - \frac{\rho}{16} D \frac{s'_m(y)}{R(y)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \{ 4nl + 2l(2l-1) \} a_{2n} a_{2l} \eta^{2(l+n)-2} \quad \text{----- (10)}$$

(10)式をみると、 y の関数の部分と η の関数の部分が分離されているので、(10)式が恒等的になりつためには、

$$\frac{d s'_m(y)}{dy} = - \frac{s'_m(y)}{R(y)} \frac{d R(y)}{dy} = - \frac{\rho}{16} D \frac{s'_m(y)}{R(y)} \quad \text{----- (11)}$$

(11)の2,3項より $R(y)^2 = \frac{\rho}{8} D y + C_1$ ----- (12) (11)式の1,3項および(12)式より $s'_m(y) = C_2 / \sqrt{6 D y + 16 C_1}$ ----- (13)

ここで C_1 , C_2 は積分定数である。 C_2 は境界条件 $y=0$ で $s = s_s$ より、 $C_2 = 4 \sqrt{C_1} (s_s - s_f)$ となる。したがって、

$$s'_m(y) = 4 \sqrt{C_1} (s_s - s_f) / \sqrt{6 D y + 16 C_1} \quad \text{----- (14)}$$

(11)式より Σ にかかわる係数を消去すれば、 $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2l}{2n+1} - 1 \right) a_{2n} a_{2l} \eta^{2(l+n)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{4nl}{2n+1} - 2l \right) a_{2n} a_{2l} \eta^{2(l+n)}$

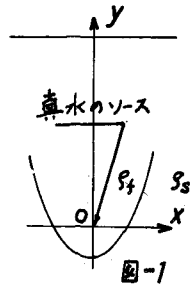
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \{ 4nl + 2l(2l-1) \} a_{2n} a_{2l} \eta^{2(l+n)-2} \quad \text{----- (15)}$$

(15)式の η の同べきの係数を比較して求めると、 $a_2 = -\frac{1}{2} a_0$, $a_4 = -\frac{7}{24} a_0$, $a_6 = -\frac{11}{960} a_0$, $a_8 = -\frac{1}{8064} a_0$... とする。いま $f(\eta)$ として a_0 をとれば $f(\eta) = a_0 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{R(y)} \right)^2 - \frac{7}{24} \left(\frac{\eta}{R(y)} \right)^4 \right]$ したがって(4),(5)式より $x=0$ で $f(\eta)=1$ となるから $a_0 = 1$ したがって $f(\eta) = 1 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\eta}{R(y)} \right\}^2 - \frac{7}{24} \left\{ \frac{\eta}{R(y)} \right\}^4$ ----- (16)

積分定数 C_1 を含んだ流速 u , v 、密度 s は次式で与えられる。

$$u = \frac{k}{\rho_f \lambda} 12 \sqrt{C_1} (s_s - s_f) D / (6 D y + 16 C_1)^{\frac{3}{2}} x \left[1 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{R(y)} \right\}^2 - \frac{7}{24} \left\{ \frac{x}{R(y)} \right\}^4 \right] \quad \text{----- (17)}$$

$$v = \frac{k}{\rho_f \lambda} 4 \sqrt{C_1} (s_s - s_f) / (6 D y + 16 C_1)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{R(y)} \right\}^2 - \frac{7}{24} \left\{ \frac{x}{R(y)} \right\}^4 \right] \quad \text{----- (18)}$$



$$\rho = \rho_s - 4\sqrt{C_1}(\rho_s - \rho_0)/(60g + 16C_1)^{1/2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{dy} \right)^2 - \frac{1}{24} \left(\frac{y}{dy} \right)^4 \right] \quad (19)$$

ここで \$C_1\$ は、(12)式について、ある \$y\$ における \$R(y)\$ を与えることによってえられるが、いまのところ困難である。本報では \$R(y)\$ とし図-2 に示すように、ポテンシアル流れの淡水境界面の \$x\$ 方向の長さをとつてみた。上田、杉尾によつて与えられた暗きよの淡水注入による淡水境界面の近似解によると、複素ポテンシアル \$W\$ は、

$$W = \frac{Q}{2\pi} \ln \left\{ (z-di)/(z+di) \right\} + C_0 + i(mRE)y \quad (20) \quad \text{ここで } Q: \text{暗きよからの流量}$$

$$d: \text{流出点の位置}, E = (\rho_s - \rho_0)/\rho_0 \quad \phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z^2 + y^2 d^2}{z^2 + y^2 d^2} + C_0 - (mRE)y \quad (21)$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2xy}{x^2 - y^2} + (mRE)x \quad Q = 2\pi \{ R \Delta H - mRE(d-r) \} / \ln \{ (2d-r)/r \} \quad (22)$$

$$\text{淡水境界面の形状は、} -\tan \left(\frac{2\pi mRE}{Q} x \right) = 2dx/(d^2 - x^2 - y^2) \quad (23)$$

$$y_0 = \sqrt{Qd/mRE + d^2} \quad (24) \quad \text{ここに } m = 1 + \frac{Q}{2\pi RE y_0} \ln \frac{y_0 - d}{y_0 + d} \quad (25)$$

したがつて、流量 \$Q\$、水頭差 \$\Delta H\$、淡水注入点の深さ \$d\$ を与え、(23)、(24)、(25)、(26)式を連立させて境界面の形状がえられる。

ここでは暗きよから十分上方に離れた水深 \$y\$ において、ここでえられた境界面形状の境界幅 \$E\$ を用いて (12)式から \$C_1\$ を決定し、(17)、(18)、(19)式から、分散、混合を考えた場合の、密度、流速分布を求める方法をとつた。

3. 解について

いま \$Q = 0.293 \text{ cm}^3/\text{s}\$, \$m = 0.965\$, \$\Delta H = 25.27 \text{ cm}\$ とし、(23)~(26)式より、ポテンシアル流れの淡水境界面を算定し、\$y = 10 \text{ m}\$ における境界幅 \$20 \text{ cm}\$ を用いて (12)式から各粒径 \$D\$ に対する \$C_1\$ を求め、(17)~(19)式より、\$u\$, \$v\$, \$\rho\$ を求めた。その一部を図-4 に示す。また \$\rho_m(y)\$, \$v_m(y)\$ を図-5 に示す。図-4, 5 から粒径 \$D\$ が大きくなると、したがつて分散係数が小さくなると、密度について \$y\$ 軸上の値は大きくなり、その拡散幅も大きくなり、また垂直流速 \$v\$ について \$y\$ 軸上で小さくなり、その現われる範囲の水平幅は大きくなる。なお本報の解は、各水深の水平方向の密度分布および垂直流速分布を (6)(7)式に示すようなべき級数に於いたもので、\$x/R(y)\$ がある程度小さくば値がなすべからぬ。したがつて \$y\$ 軸上およびその近傍の密度、流速については、十分の精度をもつものと考えられるが、\$x = R(y)\$ 付近すなわち、淡水境界面付近については不正確な値となっていると考えられる。ちなみに、図-3 の実線は \$D = 1 \text{ mm}\$ の本報による \$\rho = \rho_0\$ の境界線を図-4 (a) の \$A\$ 点が図-3 の \$A\$ 点に相当するものを導いたものである。

4. おさひ

以上により、分散がある場合の地下密度流の解の一部を導きえたとはいえる。なお淡水境界面近傍については、疑問の点が多く残っている。今後数値解析および実験によつて、本報の解を検討し、とくに各水深における水平方向の密度、垂直流速の分布形の検討および境界部の進行現象を研究して、十分精度をもつ解析解をえたいと考えている。

参考文献

- 1) P.G. Saffman: "A theory of dispersion in a porous medium", Jour. of Fluid Mech. No. 6 1959.
- 2) 上田、杉尾: "暗きよからの淡水注入による淡水境界面の解析", エネルギー論文集, No. 225 May, 1974.

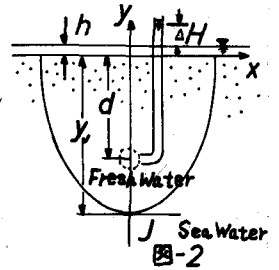


図-2

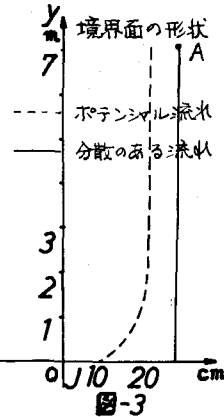


図-3

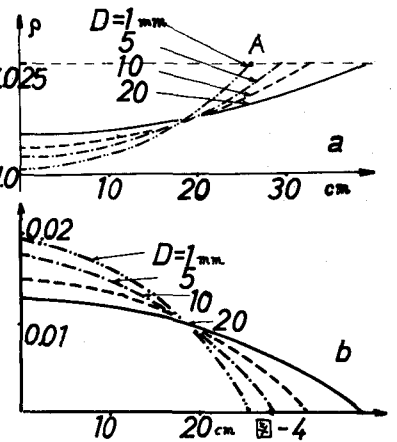


図-4

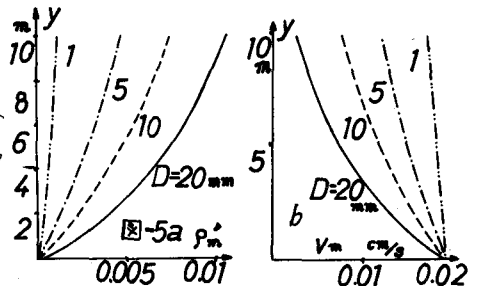


図-5a