

九州大学 工学部 正員 上田年比古, 同 正員 神野健二,

○学生員 山口望男, 学生員 徳永陽一

序. 浸透層内の流れの解析は, 河川現象や地下水中での拡散現象などを考えるうえで, 非常に興味ある問題であり, 従来から *Shaidzev*, *Caffman* 等によって研究されてきた。*Caffman*⁽¹⁾ は浸透層内の空隙部分を細管で置き換えた統計的に解析可能な確率モデルを考えたが, 水理学的特性量に大きな影響を及ぼす要因と考えられる空隙構造特性としての細管径の分布については考慮していない。したがってここでは, 新たに細管径の分布について検討を行った。さて, 実際の浸透層内の空隙は非常に複雑な形状を成しているのど, それを円管に置き換えるにあたっては, 水理学的特性量を十分表現し得るような細管径の分布をとるべきであろう。本報では, 実験によって透水係数, 分散係数を実験し, その両者からこれらに適合する細管径の分布を検討する。

1. 細管半径 a の分布, $f(a)$ を導入した場合の透水係数, 分散係数の表示。

式内⁽²⁾のシミュレーション結果および砂層の早見判定によると, 多孔体を構成する粒子が均等な場合, 細管径の分布は正規分布することと表示されており, 構成粒子が一樣でない場合は, さらにランダムな要因が加わるから正規分布にさらに近づいてくると考えられる。したがって, いま細管径は正規分布することとして, $f(a) = N(\mu_a, \sigma_a^2)$ とおけば, μ_a と σ_a^2 が求まれば細管の分布は決定される。いま, μ_a と σ_a^2 を透水係数と分散係数から決定するために, 透水係数と分散係数に $f(a)$ を導入しよう。まず, 透水係数を考えると, 細管内の流れが *Hagen-Poiseuille* にしたがいとすれば, 平均流速は P を x 方向の圧力勾配とて, $\bar{v} = P_{gx} \cos \theta \cdot a^2 / (8\eta)$, (ここに η : 粘性係数), 細管内の流量は $q = P_{gx} \cos \theta \cdot \pi a^2 / (8\eta)$, 空隙率 λ , 全断面積 A , 細管部分の断面積 A_a とすると $\lambda A = A_a$ より $A = \Sigma \pi a^2 / (\lambda \cos \theta)$, 断面の全流量は, $Q = \Sigma q$ で 断面平均流速は,

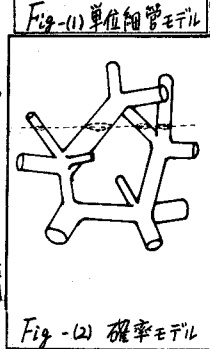
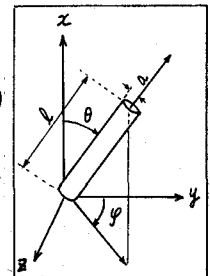
$U_0 = Q/A = \lambda P_{gx} \Sigma a^2 \cos \theta / (8\eta \Sigma a^2)$, ここでランダム量 a, θ の確率密度関数を $f(a), g(\theta)$ とすると, $g(\theta) = \sin \theta d\theta / d\varphi / 2\pi$, $\int \cos^2 \theta g(\theta) d\theta = 1/3$ となり, 断面平均流速は,

$U_0 = \lambda P_{gx} \int a^2 f(a) da / (24\eta \int a^2 f(a) da) \dots (1)$ と表わされるから透水係数は $k = \lambda P_{gx} \times \int a^2 f(a) da / (24\eta \int a^2 f(a) da)$, ここで $f(a) = N(\mu_a, \sigma_a^2)$ より $\int a^2 f(a) da = \sigma_a^2 + \mu_a^2$, $\int a^4 f(a) da = 3\sigma_a^4 + 6\sigma_a^2 \mu_a^2 + \mu_a^4$ であるから $k = \lambda P_{gx} (3\sigma_a^2 + 6\sigma_a^2 \mu_a^2 + \mu_a^4) / (24\eta (\sigma_a^2 + \mu_a^2)) \dots (2)$,

次に分散係数も *Caffman* の分散統計理論にしたがって考える。

Caffman は細管の樹枝状結合体として確率モデルを考え, 細管の方向 (θ, φ) と圧力の変動量をランダム量とし, 細管内は *Hagen-Poiseuille* の流れとして, $\theta \sim \theta + d\theta, \varphi \sim \varphi + d\varphi$ の向きに細管に含まれる流体粒子が, 圧力変動 dP_r をうける確率 dP_{rp} を求めた。ここで, さらに細管径の分布 $f(a) = N(\mu_a, \sigma_a^2)$ を付加すると, a は他のランダム量と独立であるから $dP_{rp} \times f(a) da$ となる。細管内の x 方向の平均流速は $\bar{v} = P_{gx} \cos \theta \cdot a^2 / (8\eta)$ で その空間平均, すなわち空隙内断面平均流速は $U = \iint \bar{v} dP_{rp} f(a) da = P_{gx} \int a^2 f(a) da / (24\eta) \dots (3)$, いま, 係数 α を用いて式(2)と式(3)より, $\alpha U = U_0$ とおくと $\alpha = \lambda \int a^2 f(a) da / (\int a^4 f(a) da)$ となり, $\sigma_a^2 = 0$ すなわち細管径が一樣な場合, $\alpha = \lambda$ となり *Forchheimer* の仮定が成り立つのがわかる。さて, 粒子の細管内の滞留時間を t とすると, 粒子が細管内の半径方向の位置 $r \sim r + dr$ にある確率は $dP_r = 2\pi r dr / a^2$, 粒子の個数が流速に準じた度数をもつとすれば, 粒子の平均滞留時間は $\bar{t} = \iiint t \times v(r) dP_r f(a) da dP_r$ より求められ, 分子拡散の影響が無視できるときは, $\bar{t} = 2l/3U$ となる。時間ステップ Δt 内に流体粒子が変位する距り X_n の分散を $\text{Var}[X_n]$ とすると $\text{Var}[X_n] = n l^2 / \bar{t}$ (ここに l : 細管長) となる。

このとき分散係数 D は, $D = \text{Var}[X_n] / (2n \bar{t})$ によって評価されると考えると $D = U l^2 / 24 = [P_{gx} \times \int a^2 f(a) da] / (576\eta) = [P_{gx} (\sigma_a^2 + \mu_a^2)] / (576\eta)$, 分散係数が流れによって支配されることを考慮すると, $(\sigma_a^2 + \mu_a^2)$ は D/P_{gx} の値によって求められる。したがって, $(\sigma_a^2 + \mu_a^2) = 576\eta \cdot D / (P_{gx} l) \dots (4)$



2. 実験について: 実験は、径10.4 cm、長さ100.5 cmのシリンダー内にガラスビーズをつめ、最初塩水で満たし、原水から淡水を流して、50.5 mmと80.5 cmの位置での濃度変化と断面平均流速 U 、および圧力勾配を実測した。試料は、平均粒径 0.505 mm, 1.099 mm, 1.282 mm, 2.740 mmの4種類を使った。実験結果を表-1に示す。また、分散係数を動粘性係数 ν で無次元化して、レイノルズ数との関係とみると、Fig-(3)のようになり、Harleman⁽³⁾の実験結果とよく一致する。しかし、Saffmanによる分散係数は、実験よりかなり小さめになっており、したがって式(4)をそのまま使うことはできない。いま、 $D/\nu = \psi R_e^\phi$ として ψ と ϕ を実験より求めると、Fig-(3)より $\psi = 0.83$, $\phi = 1.20$ がえられる。次に $D/\nu = \psi R_e^\phi = \psi (U l / \nu)^\phi$ において、 $U = P_{gx} \bar{a} / (24 \eta)$ を代入して $\bar{a}$ について整理し、 $\bar{a} = \sigma_a^2 + \mu_a^2$ とおくと、

$$(\sigma_a^2 + \mu_a^2) = \frac{(D/\nu)^\psi}{P_{gx}} \times \frac{24 \eta \nu}{\psi^\psi l} = \left(\frac{D}{\nu \psi} \right)^\psi \times \frac{24 \eta^2 L}{8 l \Delta H} \quad \dots (5) \quad \text{ここに } P_{gx} = \rho g \frac{\Delta H}{L}$$

以上のように、式(2)と式(5)によって、透水係数 k と分散係数 D が μ_a と σ_a で表わされた。いま、細管長 l が多孔体構成粒子の平均径 μ_d に等しいとして、 $l = \mu_d$ とし、式(2)と式(5)を連立して σ_a と μ_a を求めると次のようになる。

表-2

	λ	μ_d	σ_a	μ_a	σ_a	μ_d/μ_a
No.1	0.368	0.505	0.0489	0.097	0.0147	5.2
No.2	0.361	1.099	0.1035	0.184	0.0410	6.0
No.3	0.338	1.282	0.0564	0.267	0.0155	4.8
No.4	0.354	2.740	0.4293	0.524	0.0747	5.2

(μ_d : ガラス玉の平均径, σ_a : ガラス玉の標準偏差)

Saffmanによると、細管径 l は $l/5$ 程度の値をとることが示唆されているが、表-2の μ_d/μ_a をみると、このことが、ほぼ妥当であるようである。

3. 考察: 透過層内の空隙を細管でおきかえ、その管径の分布が正規分布すると仮定して、透水係数と分散係数から細管径の平均値 μ_a とその分散 σ_a を求め、細管の平均径が管長 l のほぼ $1/5$ になることがわかった。Saffmanによる分散係数が実験と合わない理由としては、細管の分、合流点における管径の違いによる影響が考えられる。これを考慮すると、流体粒子の変位の分散と平均滞留時間が両者とも大きくなると考えられるが、 $\text{Var}[X_n]/\bar{t}$ が大きくなれば、Fig-(3)における直線②は実験値に近づくであろう。なお、粒度分布と細管径の分布の相関は、試料の詰めかたによる要因としての空隙率も関係していると考えられるので、空隙率についてもさらに検討している。

参考文献

(1) P.G. Saffman: "A theory of dispersion in a porous medium", Journal of Fluid Mechanics No.6 1959.

(2) 武内等: "確率モデルによる多孔体内の流れのシミュレーション", 土木学会論文報告集, 第187号, 1971.

(3) D.R.F. Harleman: Journal of Fluid Mechanics, Vol.16, part 3.

試料番号	透水係数 k (cm ² /s)	分散係数 D (cm ² /s)	Re 数
No.1 平均径 0.505 mm	$k=0.1237$	0.00031	0.0452
		0.00072	0.1156
		0.00100	0.2269
		0.00389	0.5284
		0.01084	1.2629
No.2 平均径 1.099 mm	$k=0.5694$	0.00465	0.7626
		0.02226	3.8422
		0.00807	1.5838
		0.01629	2.1384
		0.00087	0.1529
No.3 平均径 1.282 mm	$k=0.9867$	0.01910	1.5718
		0.00380	0.3681
		0.00660	0.5903
		0.08500	5.9076
		0.03490	2.7274
No.4 平均径 2.740 mm	$k=3.3900$	0.00208	0.3108
		0.00645	0.7230
		0.01360	1.1780
		0.03400	3.6260
		0.10660	7.3340

表-1

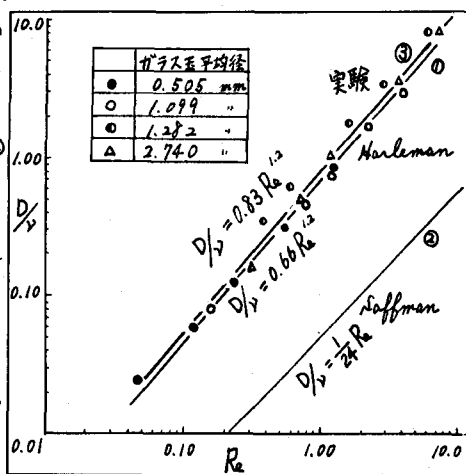


Fig-(3). (D/ν) と Re の関係