湾内汚染物質追跡の数値計算モデルについて－その２－

九州産業大学　正会員　加納正道
九州産業大学　正会員　崎山正常
九州産業大学　学生員○空閑幸雄
九州産業大学　学生員　馬渕博志

1.まえがき　湾内や灘の規模の海域において工場廃水や都市下水などの汚染物質を追跡する方法には，一般に模型実験と拡散方程式の数値解法とが用いられている。筆者らは，これまでにも，模型実験をそのまま現地へ適用するには拡散相似が成りたち難い点に問題があること[1]，数値解法には差分方程式の計算過程に生じる数値拡散誤差を解決する必要があること[2][3]，また拡散係数を物理的に妥当なかたちで拡散方程式へ導入する必要をのべている。本報は，Bellaの提案になる数値拡散係数について筆者らの解釈をのべ，これがある場合には不合理な結果を与えることから，これを除去すべく新たに数値移送係数を定義し，これによる解析結果が妥当であることをのべたものである。

2.拡散方程式の差分化　前報などにのべたように流水中の任意の位置，時刻の汚染物質濃度は拡散方程式であらわされる[4]。これを簡単のため一次元表示すれば(1)式となる。

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{\partial(US)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial S}{\partial x}\right)\quad(1)$$

ここに　S：拡散物質濃度，u：x方向の流速，K_x：x方向の拡散係数である

(1)式を差分表示する場合，表示法として陽形式，陰形式および半陰形式があり，またそれぞれに差分法として前方差分，中央差分および後方差分があって，その組合せは9種類がある。ここでは，数値解の安定性と収束性を考慮して，右辺第一項の移送項には陽形式の前方差分と後方差分を流速Uの正負により選択採用し，第二項の拡散項には陰形式を採用する。よって(1)式は

$$\left.\begin{array}{ll}U_i\geqq 0\text{のとき} & (S_i^{k+1}-S_i^{k})/\Delta t=-U_i(S_i^{k}-S_{i-1}^{k})/\Delta x+K_{x,i}(S_{i-1}^{k+1}-2S_i^{k+1}+S_i^{k+1})/(\Delta x)^2\\ U_i<0\text{のとき} & (S_i^{k+1}-S_i^{k})/\Delta t=-U_i(S_{i+1}^{k}-S_i^{k})/\Delta x+K_{x,i}(S_{i-1}^{k+1}-2S_i^{k+1}+S_i^{k+1})/(\Delta x)^2\end{array}\right\}\quad(2)$$

となる。ここにΔt：時間区分，Δx：距離区分，S_i^k：i地点のk時刻の濃度である。

ところで，上式(2)において未知の量である$(k+1)$時刻の濃度を算定する過程で$U_i\cdot\Delta t$をΔxに等しく設定することは理想であるが，湾内流のようにU_iが場所と時間の関数である場合は，解析モデルの作成にあたってこれを等しくすることは，実際には極めて困難である。そこで通常はΔtとΔxをある一定の間隔できざんだ解析モデルを設定するが，そうすると(2)式の右辺第一項の演算において実際には不合理ないわゆる数値拡散誤差があらわれる。Bellaはこれを Pseudo-dispersion(偽拡散)と呼び，U_iが一定な河川内の拡散についてのこれの補正を拡散項で補正することを考え，数値拡散係数D_Nを定義した。いま，U_iが一定の条件のもとで考えられたD_Nについて，その物理性をU_iが変化する湾内において検討してみよう。図-1(a)に示すように，時刻kにおいて距離iを中心とした幅Δx，高さS_i^kの長方形の濃度分布を考える。$U_i\geqq 0$の場合移送だけをとりあげれば，これは時刻$k+1$においては(b)のような状態になるはずである。ところがいまの場合，時刻$k+1$におけるi点の拡散は，その移送に基因して，

$$U_iS_i^k\Delta x-U_iS_i^{k+1}\cdot U_i\Delta t\fallingdotseq S_i^{k+1}\{U_i\Delta x(1-U_i\Delta t/\Delta x)\}\quad(3)$$

だけ進んでいることになる。これを(2)式の演算において補正するため，(2)式の拡散項を

$$K_{x,i}\frac{S_{i-1}^{k+1}-2S_i^{k+1}+S_{i+1}^{k+1}}{(\Delta x)^2}=2K_{x,i}\frac{\frac{1}{2}(S_{i-1}^{k+1}+S_{i+1}^{k+1})-S_i^{k+1}}{(\Delta x)^2}$$

のように書きかえ，

$\frac{1}{2}(S_{i-1}^{k+1}+S_{i+1}^{k+1})$の値をほぼ$S_i^{k+1}$の値と同じ程度とみなして(3)式による拡散の進み過ぎをもとにもどすには，上式の右辺の$2K_{x,i}$より，進みすぎ分を差し引いた$2K_{x,i}-U_i\Delta x(1-U_i\Delta t/\Delta x)$を(2)式の拡散係数のかわりに採用す

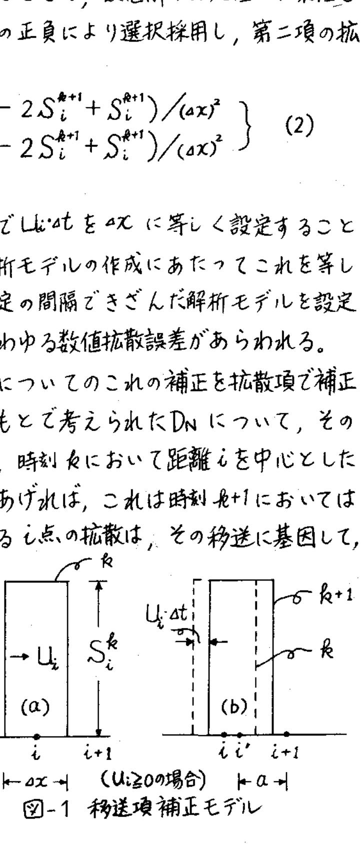

図-1　移送項補正モデル

ればよく，拡散項は

$$\left\{2K_{x,i}-U_i\Delta x\left(1-\frac{U_i\Delta t}{\Delta x}\right)\right\}\frac{\frac{1}{2}(S_{i-1}^{k+1}+S_{i+1}^{k+1})-S^{k+1}}{(\Delta x)^2}$$

$$=\left\{K_{x,i}-\frac{U_i\Delta x}{2}\left(1-\frac{U_i\Delta t}{\Delta x}\right)\right\}\frac{S_{i-1}^{k+1}-2S_i^{k+1}+S_{i+1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} \qquad (4)$$

となる。右辺の{ }内の第二項を$K_{N,x,i}$とおき(2)式の$K_{x,i}$のかわりに

$$K'_{N,x,i}=K_{x,i}-K_{N,x,i} \qquad (5)$$

を用いれば移送に基因する拡散の進みすぎは補正されることになる。$U_i<0$の場合および移送項に中央差分を用いる場合についても同様な考察によって次の結果がえられる。

$$K_{N,x,i}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}U_i\Delta x\left(1-\frac{U_i\Delta t}{\Delta x}\right) & \text{--- 後方差分} \\ -\frac{1}{2}U_i^2\Delta t & \text{--- 中央差分} \\ -\frac{1}{2}U_i\Delta x\left(1+\frac{U_i\Delta t}{\Delta x}\right) & \text{--- 前方差分}\end{bmatrix} \qquad (6)$$

これはBellaの提案による数値拡散係数D_Nと一致する。以上のように，Bellaによる数値拡散係数は時刻kにおいて，$U_i\geqq 0$の場合には，距離iと$i-1$で，$U_i<0$の場合には$i+1$とiの2個所で生ずるPseudo-dispersionを常に，$k+1$において$i-1$，iおよび$i+1$の3点で近似的に補正してゆくことになり，その理論的妥当性は前述のとおりであるが，われわれの目的にこの方法を適用した場合，やはり負の濃度が出現するなどの不合理が生じた。

3.数値移送係数の定義　そこで，われわれは時刻kにおいて，距離iと$i-1$とに生じたPseudo-dispersionは同じkにおいてiと$i-1$とで補正し，またkにおいて$i+1$とiとで生じたPseudo-dispersionも同じkにおいて$i+1$とiとで補正することを試みた。まず移送に基因するPseudo-dispersionは(3)式によってあらわされているのでこれを$U_i\geqq 0$の場合，

$$S_i^{k+1}\{U_i\Delta x(1-U_i\Delta t/\Delta x)\}\fallingdotseq$$

$$S_i^{k}\{U_i\Delta x/2(1-U_i\Delta t/\Delta x)\}+S_{i-1}^{k}\{U_i\Delta x/2(1-U_i\Delta t/\Delta x)\} \qquad (7)$$

のようにあらわし，さらに辺々を$(\Delta x)^2$で割って単位長さ当りの$U_iS_i^k$および$U_iS_{i-1}^k$に対するPseudo-dispersionとして，右辺の第一項および第二項をその補正量と考えれば，これを(2)式の右辺第一項すなわち移送項に適用して，

$$S_i^{k+1}-S_i^{k}=$$

$$\left\{U_i\Delta t/\Delta x-U_i\Delta t/2\Delta x(1-U_i\Delta t/\Delta x)\right\}(S_{i-1}^{k}-S_i^{k})+\Delta t\cdot K_{x,i}(S_{i-1}^{k+1}-2S_i^{k+1}+S_{i+1}^{k+1})/(\Delta x)^2 \qquad (8)$$

がえられる。そこでわれわれは，右辺第一項の{ }内の第二項を数値移送係数（Numerical Convection Coefficient）$C_{N,x,i}$と定義する。$U_i<0$の場合も同様の考察により，次のようにあらわされる。

$$C_{N,x,i}=\begin{bmatrix}\frac{U_i\Delta t}{2\Delta x}\left(1-\frac{U_i\Delta t}{\Delta x}\right) & \text{-- } U_i\geqq 0 \text{ 後方差分} \\ -\frac{U_i\Delta t}{2\Delta x}\left(1+\frac{U_i\Delta t}{\Delta x}\right) & \text{-- } U_i<0 \text{ 前方差分}\end{bmatrix} \qquad (9)$$

これを用いれば(2)式は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} U_i\geqq 0\text{のとき}\quad S_i^{k+1}-S_i^{k}&=-(U_i\Delta t/\Delta x-C_{N,x,i})(S_i^{k}-S_{i-1}^{k}) \\ &\quad+K_{x,i}(S_{i-1}^{k+1}-2S_i^{k+1}+S_{i+1}^{k+1})/(\Delta x)^2 \\ U_i<0\text{のとき}\quad S_i^{k+1}-S_i^{k}&=-(U_i\Delta t/\Delta x-C_{N,x,i})(S_{i+1}^{k}-S_i^{k}) \\ &\quad+K_{x,i}(S_{i-1}^{k+1}-2S_i^{k+1}+S_{i+1}^{k+1})/(\Delta x)^2\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

上式をわれわれの問題に適用した結果は負の濃度があらわれるというような不合理は生ぜず，その値も図-2，図-3に示すように妥当にえられている。

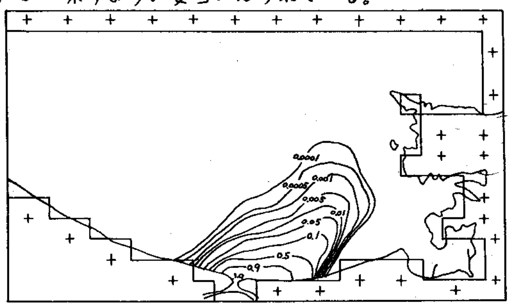

図-2 模型を対象とした数値解による等濃度曲線 (3分経過後)

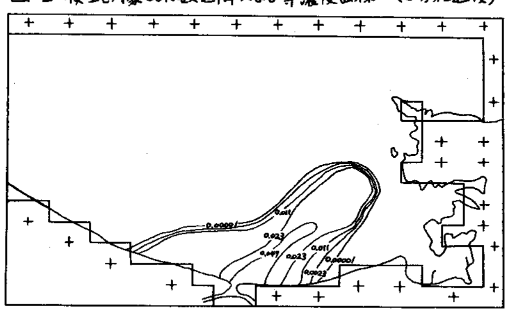

図-3 模型実験による等濃度曲線 (3分経過後)

4.むすび　D_Nを使用するよりも$C_{N,x,i}$を使用するほうが妥当な値をえる理由は次のようであろう。すなわち，湾内拡散では潮汐の影響をうけ汚染物質のひろがる方向と流向が変化し，濃度勾配が大きい場合にはD_Nを使用する際の$(S_{i-1}^{k+1}+S_{i+1}^{k+1})/2\fallingdotseq S_i^{k+1}$なる中央差分の仮定にはかなりの疑問が生じるが，$C_{N,x,i}$の適用は移送項で行ない，移送項は流向の正負で前方差分と後方差分をとるために(7)式の仮定は濃度勾配の大きい場合にもその物理性に矛盾はおこらないと考えられる。

参考文献

1) 加納，崎山：拡散模型実験についての二・三の考察，土木学会第30回年講 II-239
2) D·A·Bella, etc：Difference Modeling of Stream Pollution, Jour.of Sanitary Eng. Div., ASCE, Vol.94, SA5, 1968
3) 加納，他：湾内における汚染物質を追跡するモデルについて－その1－，昭和48年土木学会西部支部 IV-8
4) 土木学会：水理公式集，昭和46年度版 など