II—13　トラスの最適無次元構造解析（第2報）

熊本大学　工学部　正員　三池亮次
同上　学生員　○丸内　進

1．はじめに．　与えられたスパンの橋を架ける場合に、その最適構造形式と最適断面を選定することは、橋梁設計の基本であり、従来、構造の力学的特性と材料特性を勘案した経験的判断に依存することが大きかった。

近年、電子計算機による解析が可能になるとともに、ようやく橋梁設計の分野にも最適設計の手法が応用されつつあるように思われるが、構造形式の選定までを含む完全最適自動設計までには至らない．その理由として、最適設計問題に伴う制約条件式と構造変数があまりに多く、非線形制約条件式の導関数を求めて定式化することが複雑、困難であることなどの理由による。そのため、ここでは構造形式としてはトラス橋に限定して、その骨組中心線のトポロジー的性質が同一であり、その形状が相似である場合に、スパンLに対応する最適断面を選定する問題を設定する。ただし、現実の橋梁の力学的条件をできるだけ満足するように、ある簡略化された、舗装の死荷重と主構重量と、示方書に定められた活荷重を載荷するものとする．

2．剛結トラスの最適無次元解析．　骨組構造解析における無次元剛性マトリックス$\mathbb{K}^*$は部材の細長比λ，部材断面積A，長さℓ，ヤング率Eの代表値A_0, ℓ_0, E_0に対する比を$k_A=A/A_0, k_\ell=\ell/\ell_0, k_E=E/E_0$，変換マトリックス$\mathbb{T}$およびポアソン比$\nu$によって構成され、この形状および材質の無次元数に対応する，変位uおよび回転変位ϕの無次元数$u^*=(E_0A_0/P_0)(u/\ell_0)$，$\phi^*=(E_0A_0/P_0)\phi$を要素とする変位の無次元数を$\mathbb{d}^*$とし、また、外力の基準値を$P_0$，外力$P$の無次元数$P^*=P/P_0$，モーメント$M$の無次元数$M^*=M/P_0\ell_0$を要素とする無次元外力を$\mathbb{P}^*$，応力の無次元数を$\sigma^*=\sigma A_0/P_0$とするとき、変位または応力の無次元数$\mathbb{d}^*, \sigma^*$は、これらの形状，材質外力無次元数の関数であり，

$$\mathbb{d}^*,\ \sigma^*=\mathbb{F}(\lambda, k_\ell, k_A, C_F, \mathbb{T}, \nu, k_E)\cdot\mathbb{P}^* \tag{1}$$

ここに、C_Fは部材断面の中立軸よりの縁距離$h/2$と回転半径rの比で．

$$C_F=h/2r \tag{2}$$

である。また、無次元外力$\mathbb{P}^*$としては、死荷重を$\mathbb{P}_D$，活荷重を$\mathbb{P}_L$，骨組部材の単位重量をw，その代表値をw_0死荷重の代表値を$P_{D0}=w_0A_0\ell_0$として、死活荷重の合力$\mathbb{P}$をP_{D0}で除した、無次元数$\mathbb{P}^*$は

$$\mathbb{P}^*=\mathbb{P}_D^*+\frac{\mathbb{P}_L}{w_0A_0\ell_0} \tag{3}$$

$\mathbb{P}_D^*=\mathbb{P}_D/P_{D0}$の要素$P_D^*$は$k_w=w/w_0$として，$P_D^*=\sum\alpha k_w k_A k_\ell$（ここに$\alpha$は定数）である。

無次元表示を用いた最適構造解析の利点として

(1) 一般に、座屈に対する条件は、$\sigma_a=f(\lambda)$であり、断面積Aと断面2次モーメントIを構造変数とするよりは、制約条件式の導関数の誘導が容易である。

(2) 細長比の下限に対する条件．トラスの曲げによる2次応力は、

$$\frac{\sigma_m A_0}{P_0}=\frac{\sigma_m}{w_0\cdot\ell_0}=\frac{1}{k_A}\cdot\frac{1}{k_\ell}\lambda\cdot C_F\cdot M^* \tag{4}$$

で与えられ、また、部材の高さhと長さℓの比$\frac{h}{\ell}$の下限が$\frac{1}{10}$程度である条件は、

$$\frac{h}{\ell}=2\frac{C_F}{\lambda}\leq\frac{1}{10} \tag{5}$$

であるから、C_Fと細長比λをパラメーターとして、設定することができる。

(3) 断面の形状特性は、細長比λよりk_Iを得、k_A, C_F, λ_0およびA_0によって表わすことが可能で

あるから、断面性状に対する制約条件式を考慮する必要がない。

(4) 骨組中心線の形状が相似の条件に対しては k_ℓ が一定となり、また、荷重項の表示が簡易化され、制約条件式の展開が容易である。

3．ピン結トラスの最適無次元解析　上記のように最適無次元構造解析は有効性を発揮するものと思われるが、制約条件式の展開が難解であるので、まず、ピン結トラスの最適無次元解析を試みた。

目的関数 Z は最小重量設計に従うとき、次式で与えられる。

$$Z = W_0 A_0 \ell_0 \left\{ 1 + \sum_{ij} k_{wij} k_{Aij} k_{\ell ij} \right\} \tag{6}$$

また、

$$\sigma_{ca} \leqq W_0 (\ell_0/L) L \cdot \sigma^* \leqq \sigma_{ta} \tag{7}$$

が、無次元化された応力に関する制約条件となる。ところで、この目的関数 Z および制約条件式はともに非線形であるので線形化し、基準部材の断面積 A_0，断面積比 k_{Aij} を構造変数として、SLP法により解析を行なった。

$$\sigma_{ca} - W_0(\ell_0/L) L \cdot \sigma^{*(i)} \leqq W_0(\ell_0/L) L \left\{ \left(\frac{\partial \sigma^{*(i)}}{\partial A_0} \right) \Delta A_0^{(i)} + \sum_{ij} \left(\frac{\partial \sigma^{*(i)}}{\partial k_{Aij}} \right) \Delta k_{Aij}^{(i)} \right\} \leqq \sigma_{ta} - W_0 (\ell_0/L) L \sigma^{*(i)} \tag{8}$$

を満足して

$$\Delta Z^{(i)} = \left(\frac{\partial Z^{(i)}}{\partial A_0} \right) \Delta A_0^{(i)} + \sum_{ij} \left(\frac{\partial Z^{(i)}}{\partial k_{Aij}} \right) \Delta k_{Aij}^{(i)} \tag{9}$$

を最小にする構造変数 $\Delta A_0^{(i)}$ および $\Delta k_{Aij}^{(i)}$ を求め、これにより構造変数を修正する。このプロセスを繰り返すことにより、最適な構造変数 (A_0, k_{Aij}) を得る。

ここで、状態変数および目的関数の感度係数を求める。(i,j) 部材の無次元応力 σ_{ij}^* は、

$$\sigma_{ij}^* = [0\,0\,1\,0]\, \mathbb{T}_{ij} \mathbb{P}_{ij}^* / k_{Aij} \tag{10}$$

で与えられる。したがって、構造変数を X_i で表わすと、状態変数の感度係数は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial X_i} = [0\,0\,1\,0] \frac{1}{k_{Aij}^2} \mathbb{T}_{ij} \left\{ \frac{\partial \mathbb{P}_{ij}^*}{\partial X_i} k_{Aij} + \mathbb{P}_{ij}^* \frac{\partial k_{Aij}}{\partial X_i} \right\} \tag{11}$$

ところで、(i,j) 部材の無次元剛性方程式が $\mathbb{P}_{ij}^* = \mathbb{K}_{ij}^* \cdot d_{ij}^*$ であり、ピン結トラスであることから、上式は

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial X_i} = [0\,0\,1\,0] \frac{1}{k_{Aij}} \mathbb{T}_{ij} \mathbb{K}_{ij}^* \frac{\partial d_{ij}^*}{\partial X_i} \tag{12}$$

となる。ここに、

$$\frac{\partial d_{ij}^*}{\partial X_i} = \left(\frac{\partial d^*}{\partial X_i} \right)_{ij} = \left(\frac{\partial \mathbb{K}^{*-1}}{\partial X_i} \mathbb{P}^* + \mathbb{K}^{*-1} \frac{\partial \mathbb{P}^*}{\partial X_i} \right)_{ij}$$

$$= \left\{ -\mathbb{K}^{*-1} \frac{\partial \mathbb{K}^*}{\partial X_i} \mathbb{K}^{*-1} (\mathbb{P}_D^* + \mathbb{P}_L^*) + \mathbb{K}^{*-1} \left(\frac{\partial \mathbb{P}_D^*}{\partial X_i} + \frac{\partial \mathbb{P}_L^*}{\partial X_i} \right) \right\}_{ij} \tag{13}$$

ところで、(3)式より

$$\frac{\partial \mathbb{P}_D^*}{\partial A_0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathbb{P}_D^*}{\partial k_{Aij}} = \left\{ \alpha\, k_{wij} k_{\ell ij} \right\} \tag{14}$$

$$\frac{\partial \mathbb{P}_L^*}{\partial A_0} = - \frac{\mathbb{P}_L}{W_0 A_0^2 \ell_0} \quad , \quad \frac{\partial \mathbb{P}_L^*}{\partial k_{Aij}} = 0 \tag{15}$$

次に、目的関数 Z の感度係数は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial Z}{\partial A_0} = W_0 \ell_0 \left\{ 1 + \sum_{ij} k_{wij} k_{Aij} k_{\ell ij} \right\} \tag{16}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial k_{Aij}} = W_0 A_0 \ell_0 \left\{ k_{wij} k_{\ell ij} \right\} \tag{17}$$