

II — 7 板と桁との偏心結合と考慮した曲線桁橋の解析

九州大学工学部 学生員 大塚 久哲
 " " 〇平田 勝啓
 " 正員 吉村 虎蔵

1. まえがき 本研究は、曲線桁橋と扇形床板、曲線桁、および横桁の3構成要素からなる複合構造物とみて、これら構成要素間の偏心結合と考慮した曲線桁橋の解析法を提示する。これによれば格子理論、板理論、桁理論では解明が不十分であった各構成要素間の力学的相互作用の直接的把握が期待できる。解析手法には、変位法と結合法と併用する。

2. 解法 扇形床板と曲線主桁とからなる構造（基本構）の剛性行列はFSMにより、横桁のそれはFEMによりそれぞれ求める。基本構は通常のFSMにより解析できる。横桁と有する曲線桁橋では、結合法により基本構と横桁との結合力を求め、外荷重とこの結合力を同時に基本構に作用させて解析すればよい。

2-1) 扇形床板および曲線桁の剛性行列 扇形床板を図1のような扇形帯板要素に分割するとき、変位 u, v, w の変位関数は、円周方向に級数展開、半径方向に多項式近似して仮定できる。この変位関数を用いて、ひずみ・曲率と変位の関係式およびモーメント・平面応力と変位の関係式を求め、ポテンシャルエネルギー最小の原理と適用すれば扇形帯板要素の剛性行列をうる。^{1) 2)} 次に、曲線桁の中立軸に関する断面力と中立軸の変形に関する幾何学量との関係は、次式で与えられる（図2）。但し曲線桁の断面は、2軸対称断面とする。

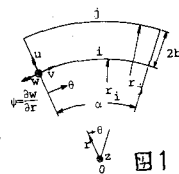


図1

$$\{N_k\} = \begin{Bmatrix} N_k \\ M_k \\ M_k \\ M_k \\ T_{ks} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_k A_k & & & & \\ & E_k I_r^0 & & & 0 \\ & & E_k I_z^0 & & \\ & & & E_k C_w & \\ 0 & & & & G_k J_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \kappa_r \\ \kappa_\theta \\ \kappa_w \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = [D_k] \{ \epsilon_k \} \quad \dots (1)$$

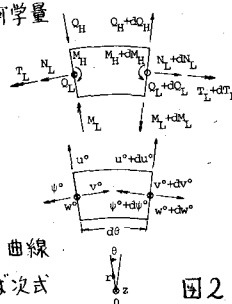


図2

ここに M_w は曲げねじりモーメント、 T_{ks} は純ねじりモーメント。式(1)の $\{ \epsilon_k \}$ の各要素を、曲線桁中立軸鉛直上方に ϵ_k だけ隔って位置する板の中立面上の変位 u, v, w, ψ で表わせば次式となる。

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{R_0} \left(\frac{du}{d\theta} - \frac{c_k}{R_0} \frac{dw}{d\theta} + u - c_k \psi \right), & \kappa_r &= -\frac{1}{R_0^2} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + R_0 \psi \right), & \kappa_\theta &= \frac{1}{R_0^2} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} - c_k \frac{d^2 w}{d\theta^2} - \frac{du}{d\theta} + \frac{c_k}{R_0} \frac{dw}{d\theta} \right), \\ \kappa_w &= \frac{1}{R_0^2} \left(-\frac{d^2 v}{d\theta^2} + \frac{dw}{d\theta} \right), & \gamma_{rz} &= \frac{1}{R_0} \left(-\frac{dv}{d\theta} + \frac{dw}{d\theta} \right) \end{aligned} \quad \dots (2)$$

R_0 : 中立軸の曲率半径

曲線桁と扇形板の接合線上に帯板要素の節線とすれば、接合線での板の変位は節線の変位であらわせるから、

$$u = \bar{z} u_m S_m, \quad v = \bar{z} v_m C_m, \quad w = \bar{z} w_m S_m, \quad \psi = \bar{z} \psi_m S_m \quad \text{ここに } S_m = \sin \frac{m\pi\theta}{\alpha}, \quad C_m = \cos \frac{m\pi\theta}{\alpha} \quad \dots (3)$$

$$\text{式(2), (3) よりベクトル } \{ \epsilon_k \} \text{ は次式で与えられる。} \quad \{ \epsilon_k \} = \bar{z} [A_m] \{ w_m \}, \quad \{ w_m \} = \{ u_m, v_m, w_m, \psi_m \}^T \quad \dots (4)$$

従って、ポテンシャルエネルギー最小の原理より曲線桁の m 項の剛性行列は次式で求められる。

$$[S_{gm}] = \int_0^\alpha [A_m]^T [D_k] [A_m] r dr \quad \dots (5)$$

$$\text{ここに、} S_{gm}(1,1) = \left(\frac{D_1}{R_0} + \frac{k_m^2}{R_0^2} D_3 \right) \frac{\alpha}{2}, \quad S_{gm}(1,2) = S_{gm}(2,1) = -\left(\frac{k_m}{R_0} D_1 + \frac{k_m^3}{R_0^2} D_3 \right) \frac{\alpha}{2}, \quad S_{gm}(1,3) = S_{gm}(3,1) = \left(\frac{c_k}{R_0^2} k_m^2 D_1 + \frac{c_k}{R_0^2} k_m^4 D_3 \right) \frac{\alpha}{2},$$

$$S_{gm}(1,4) = S_{gm}(4,1) = -\left(\frac{c_k}{R_0} D_1 + \frac{c_k}{R_0^2} k_m^2 D_3 \right) \frac{\alpha}{2}, \quad S_{gm}(2,2) = \left(\frac{k_m^2}{R_0^2} D_1 + \frac{k_m^4}{R_0^2} D_3 \right) \frac{\alpha}{2}, \quad S_{gm}(2,3) = S_{gm}(3,2) = -\left(\frac{c_k}{R_0^2} k_m^2 D_1 + \frac{c_k}{R_0^2} k_m^4 D_3 \right) \frac{\alpha}{2},$$

$$S_{gm}(2,4) = S_{gm}(4,2) = \left(\frac{c_k}{R_0^2} k_m D_1 + \frac{c_k}{R_0^2} k_m^3 D_3 \right) \frac{\alpha}{2}, \quad S_{gm}(3,3) = \left(\frac{c_k^2}{R_0^2} k_m^2 D_1 + \frac{k_m^4}{R_0^2} D_2 + \frac{c_k^2}{R_0^2} k_m^4 D_3 + \frac{k_m^4}{R_0^2} D_4 + \frac{k_m^2}{R_0^2} D_5 \right) \frac{\alpha}{2},$$

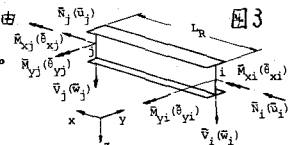
$$S_{gm}(3,4) = S_{gm}(4,3) = -\left(\frac{c_k^2}{R_0^2} k_m^2 D_1 + \frac{k_m^4}{R_0^2} D_2 + \frac{c_k^2}{R_0^2} k_m^4 D_3 + \frac{k_m^4}{R_0^2} D_4 + \frac{k_m^2}{R_0^2} D_5 \right) \frac{\alpha}{2}, \quad S_{gm}(4,4) = \left(\frac{c_k^2}{R_0^2} D_1 + \frac{D_2}{R_0} + \frac{c_k^2}{R_0^2} k_m^2 D_3 + \frac{k_m^4}{R_0^2} D_4 + \frac{k_m^2}{R_0^2} D_5 \right) \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{但し、} D_1 = E_k A_k, \quad D_2 = E_k I_r^0, \quad D_3 = E_k I_z^0, \quad D_4 = E_k C_w, \quad D_5 = G_k J_k, \quad k_m = \frac{m\pi C}{\alpha}$$

2-2) 横桁の剛性行列 曲線桁橋の横桁は、その断面諸元から水平方向せん断力と鉛直軸まわりの曲げモー

メントに抵抗する剛性は無視できると判断されるので、図3のような1節点4自由度の直線部材と考えてよい。このとき、FEMによる剛性行列は次式で表わされる。

$$\{\bar{N}_i, \bar{V}_i, \bar{M}_{yi}, \bar{N}_j, \bar{V}_j, \bar{M}_{yj}, \bar{M}_{xi}, \bar{M}_{xj}\}^T = \begin{bmatrix} [K_a] & 0 \\ 0 & [K_b] \end{bmatrix} \{\bar{U}_i, \bar{W}_i, \bar{\Theta}_{yi}, \bar{U}_j, \bar{W}_j, \bar{\Theta}_{yj}, \bar{\Theta}_{xi}, \bar{\Theta}_{xj}\}^T \quad (6)$$



2-3) 基本構と横桁との結合の手順

(a) 基本系($X_{(1)}$ 系) 基本構に外荷重($X_{(1)}$)が作用する場合FSMで解き、横桁との結合点での変位ベクトル $\{\bar{\delta}_{(1)}\}$ を求める。右下の添字(1)は基本系であることを示す(以下同様)。変位の1添字は円周方向の結合点(主桁と横桁との)番号を、2添字は半径方向の結合点番号を示す。 $[B]$ は桁の変位と板の変位を関係づける行列である。ベクトルおよびその要素の-は横桁の値であることを示し、-がないものは板の値であることを示す。

$$\{\bar{\delta}_{(1)}\} = \{\{\bar{\gamma}_{(1)}\} \{\bar{\eta}_{(1)}\}\}^T = [B] \{\{\xi_{(1)}\} \{\eta_{(1)}\}\}^T \quad (7)$$

ここに、 $\{\bar{\gamma}_{(1)}\} = \{\bar{U}_{11}, \bar{W}_{11}, \bar{\Theta}_{y1}, \dots, \bar{U}_{1n}, \bar{W}_{1n}, \bar{\Theta}_{yn}, \dots, \bar{U}_{n1}, \bar{W}_{n1}, \bar{\Theta}_{y1}, \dots, \bar{U}_{nn}, \bar{W}_{nn}, \bar{\Theta}_{yn}\}_{(1)}$, $\{\bar{\eta}_{(1)}\} = \{\bar{\Theta}_{x1}, \dots, \bar{\Theta}_{xm}, \dots, \bar{\Theta}_{xn}\}_{(1)}$
 $\{\xi_{(1)}\} = \{u_{11}, w_{11}, \varphi_{11}, \dots, u_{1n}, w_{1n}, \varphi_{1n}, \dots, u_{n1}, w_{n1}, \varphi_{n1}, \dots, u_{nn}, w_{nn}, \varphi_{nn}\}_{(1)}$, $\{\eta_{(1)}\} = \{\eta_{11}, \dots, \eta_{1m}, \dots, \eta_{1n}, \dots, \eta_{2n}\}_{(1)}$

(b) 第1系($X_{(1)}$ 系) 基本構の換算撓性行列 $[f]$ を用いて結合点の力 $\{\bar{X}_{(1)}\}$ と変位 $\{\bar{\delta}_{(1)}\}$ との関係を表わす。

$$\{\bar{\delta}_{(1)}\} = [f] \{\bar{X}_{(1)}\} = [f] \{\{\bar{Y}_{(1)}\} \{\bar{Z}_{(1)}\}\}^T, [f] = [B]^{-1} \begin{bmatrix} [k_1] & [f_{12}] \\ [f_{21}] & [k_2] \end{bmatrix} [A] \quad (8)$$

ここに、 $\{\bar{Y}_{(1)}\} = \{\bar{N}_{11}, \bar{V}_{11}, \bar{M}_{y1}, \dots, \bar{N}_{1n}, \bar{V}_{1n}, \bar{M}_{yn}, \dots, \bar{N}_{n1}, \bar{V}_{n1}, \bar{M}_{y1}, \dots, \bar{N}_{nn}, \bar{V}_{nn}, \bar{M}_{yn}\}_{(1)}$
 $\{\bar{Z}_{(1)}\} = \{\bar{M}_{x11}, \dots, \bar{M}_{x1m}, \dots, \bar{M}_{x1n}, \dots, \bar{M}_{xnn}\}_{(1)}$ ($[f]$ の具体的内容は、本稿では省略)

(c) 第2系($\bar{X}_{(2)}$ 系) 横桁の剛性行列を求める。 $\{\bar{X}_{(2)}\} = \{\{\bar{Y}_{(2)}\} \{\bar{Z}_{(2)}\}\}^T = [K] \{\bar{\delta}_{(2)}\} = [K] \{\{\bar{\gamma}_{(2)}\} \{\bar{\eta}_{(2)}\}\}^T \quad (9)$

(d) 結合点の力 $\{\bar{X}_{(1)}\}$ を求めるために次式を用いる。 $\{\bar{\delta}_{(1)}\} + \{\bar{\delta}_{(2)}\} = \{\bar{\delta}_{(1)}\} \quad (10)$, $\{\bar{X}_{(1)}\} + \{\bar{X}_{(2)}\} = \{0\} \quad (11)$

式(9)~(11)を用いて、 $\{\bar{X}_{(1)}\} = -([I] + [K][f])^{-1} [K] \{\bar{\delta}_{(1)}\}$ $[I]$: 単位行列

板の節線力は、 $\{X_{(1)}\} = \{Y_{(1)}\} \{Z_{(1)}\}^T = [A] \{\bar{X}_{(1)}\}$, $[A]$: 横桁の節点力と板の節線力を関係づける行列 $\quad (13)$

3. 数値計算例 (Ex.1) 図4のような曲

線橋模型の静的荷重実験結果と本法の結果(Theory 2)を比較すれば、表1をうる。実験値と(Theory 1)は文献³⁾による。

(Ex.2) 著者らが以前行った実験⁴⁾との比較を行なえば、図5をうる。図6は、G1桁の各ひずみ分布を示したもので、このモデルでは、 N_L と M_L によるひずみが卓越していることがわかる。

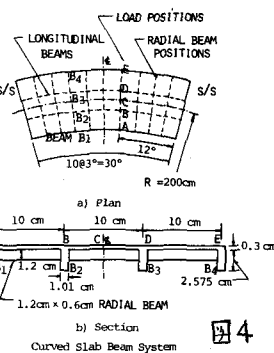
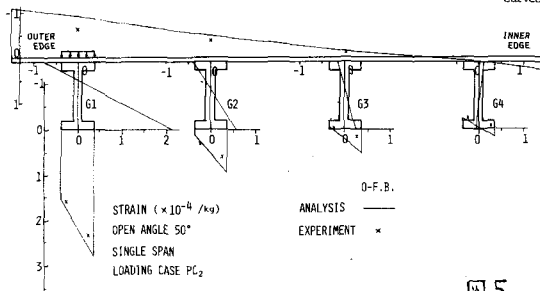


表 1

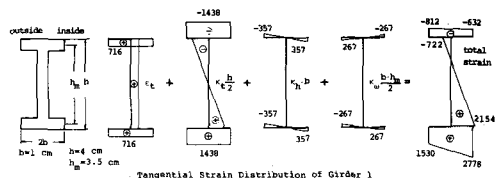
Comparison of Experimental and Theoretical Strains

Load position	Strain at	Tangential strain at midspan, in micro-strain, without radial beams		
		Exp.	Theory 1	Theory 2
A	B ₁ bottom	930	938	927
	B ₁ top	-10	-117	-15
	B ₁ bottom	94	211	245
B	B ₂ bottom	1062	1089	1082
	B ₂ top	-335	-345	-340
	B ₂ bottom	594	608	603
C	B ₃ bottom	795	807	813
	B ₃ top	-470	-479	-525
	B ₃ bottom	906	943	910
D	B ₄ bottom	527	563	578
	B ₄ top	-590	-622	-714
	B ₄ bottom	1325	1386	1317
E	B ₅ bottom	284	321	367
	B ₅ top	-765	-823	-976
	B ₅ bottom	2160	2258	2112

Theory 1 = F.D.M. + Energy Method
 Theory 2 = F.S.M.



TANGENTIAL STRAINS AT MIDSPAN OF CURVED GIRDER BRIDGE



Tangential Strain Distribution of Girder 1

図 5

図 6

参考文献 1) Y.K.Cheung: The Analysis of Cylindrical Orthotropic Curved Bridge Decks, Publications, IABSE, 29-II, 1969, pp. 41~52.

2) M.S.Cheung, Y.K.Cheung: Analysis of Curved Box Girder Bridges by Finite Strip Method, Publications, IABSE, 31-I, 1971, pp. 1~19.

3) D.N.Buragohain and S.B.Agrawal: Discrete Analysis of Curved Slab-Beam Systems, Publications, IABSE, 34-II, 1974, pp. 19~38.

4) 大塚・吉村・安藤: 曲線橋の差分法による解析と実験, 昭和44年度土木学会西部支部研究発表会, 講演集, 昭和50年2月, pp. 29~30.