II — 4　せん断流理論による薄肉閉断面桁の弾塑性捩り解析

九州大学　学生員　○藤岡健三
〃　　正員　太田俊昭

1. まえがき

先に著者らは、薄肉多室閉断面を有する桁が、捩りモーメントを受ける場合についての弾塑性解析法を示し、特に Warping に関する収束性の問題点を提示した。

すなわち、単純 Warping 理論に補正関数 Δf を導入する一手法を提案したが、今回は前論文の提示式を一部修正するとともに、塑性域の収束性に力点を置き、歪硬化を含めて解の収束性を考察することとする。

2. 基礎理論

一般に捩りモーメント増分 ΔT を受ける場合、セン断応力増分 $\Delta\tau$、曲げ捩り応力増分 $\Delta\sigma_w$ は次式となる。

$$\left.\begin{aligned} \Delta\tau &= G\cdot\Delta\gamma - 3\tau G\cdot\Delta\lambda/\bar{\sigma} \\ \Delta\sigma_w &= E\cdot\Delta\varepsilon_w - E\sigma_w\Delta\lambda/\bar{\sigma} \end{aligned}\right\} \quad \text{--------- (1)}$$

$$\left(\bar{\sigma} = \{\sigma_w^2 + \tau^2\}^{1/2} \quad , \ \Delta\lambda \text{ ; 塑性時定数} \right)$$

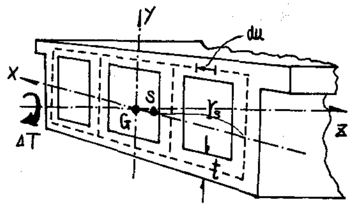


図-1

反り ΔW を、Δf を捩れ率 $\Delta\theta$ の適当な補正関数として次式のごとく導入する。

$$\Delta W = \Delta f\cdot(W_u' + W_0^p) \quad \text{------------ (2)}$$

ここで、W_u' は単純 Warping 理論における反り関数、W_0^p ; 塑性時反り関数

よって、ΔW によって生ずる $\Delta\sigma_w$ は、断面の自己平衡条件より、$W_u = W_u' - \frac{1}{A_0}\int_A W_u' dA$ として次式で示される。

$$\left.\begin{aligned} \Delta\sigma_w &= E\frac{d(\Delta f)}{dz}W_u + \Delta\sigma_w^p \\ \Delta\sigma_w^p &= E\int_A \sigma_w\Delta\lambda/\bar{\sigma}\, dA\frac{1}{A_0} - E\sigma_w\Delta\lambda/\bar{\sigma} \end{aligned}\right\} \quad \text{-------------------- (3)}$$

ここで、セン断流の概念より、Δq^* を断面閉合条件より求まる不静定セン断流として、セン断流 Δq が次式で示される。　ここに　$a_i = \int_i \frac{du}{t}$　，　$b_{ij} = \int_{ij}\frac{du}{t}$

$$\left.\begin{aligned} \Delta q &= \Delta q^* - \int_0^u t\frac{d(\Delta\sigma_w^p)}{dz}du \\ \Delta q_i^* &= \frac{1}{a_i}\Big[\oint\int_0^u t\frac{d(\Delta\sigma_w^p)}{dz}du\frac{du}{t} + 2G\Delta\theta A_i - 3\oint q G\Delta\lambda/\bar{\sigma}\frac{du}{t} \\ &\qquad + \sum b_{ij}q_j^* + 2\sum q_j^*\int_{ij}G\cdot\Delta\lambda/\bar{\sigma}\frac{du}{t}\Big] \end{aligned}\right\} \quad \text{-------- (4)}$$

式(3)，式(4)より若干の計算の後 $\bar{q}_{se} = K_s$; St.Venant の捩り関数，$\bar{q}_{we}$; 二次セン断流関数，Δq_p ; 塑性セン断流として次式を得る。

$$\Delta q = \bar{q}_{se}G\Delta\theta - E\bar{q}_{we}\frac{d^2(\Delta f)}{dz^2} + \Delta q_p \quad \text{---------------------- (5)}$$

よって応力の釣り合い式と断面閉合適合条件式による、捩りモーメント ΔT は、次式となる。

$$\Delta T = GJ\Delta\theta - EC_w\frac{d^2(\Delta f)}{dz^2} + \Delta T_1^p \quad \text{--------------------- (6)}$$

ここで右辺オ一項，オ二項はそれぞれ、St.Venant の捩りモーメント，補正された曲げ捩りモーメント，又 $\Delta T_1^p = \int \Delta q_p\cdot r_s\, du$ なる塑性捩りモーメントを示す。

一方、歪の適合条件式　$\Delta\gamma = \frac{\partial(\Delta W)}{\partial u} + \frac{\partial(\Delta\xi)}{\partial z}$ を、式(1)に代入し整理すると次式を得る。

$$\Delta q = Gt(K_s/t - r_s)\Delta f + Gt r_s\Delta\theta - 3Gt\tau\Delta\lambda \quad \text{---------------- (7)}$$

よって、歪と変形の適合条件式を用いた捩りモーメント ΔT は、次式となる。

$$\Delta T = G(J - I_c)\Delta f + GI_c\Delta\theta + \Delta T_2^p \quad \text{----------------- (8)}$$

ここに　$I_c=\int t\, r_s^2\, du$　,　$\Delta T_2^P = -3\int G t \tau \Delta\lambda \cancel{/\bar{\sigma}}\, r_s\, du$ なる塑性捩りモーメント

式(6)，式(8)より、補正関数 Δf の算定方程式，及び捩れ率 $\Delta\theta$ が、次式のごとく求まる。

$$E C_w \frac{d^2(\Delta f)}{dZ^2} - GJ\eta^2 \Delta f = -\eta^2 \Delta T + \Delta T_1^P - \Delta T_2^P(1-\eta^2) \text{ ------------ } (9)$$

$$\Delta\theta = \Delta T/GI_c - \eta^2 \Delta f - \Delta T_2^P/GI_c \text{ ------------ } (10)$$

ただし　$\eta^2 = (I_c - J)/I_c$　である。

ここで、$\Delta\lambda$ の算定は、降伏条件上　$dF = d\left[(\sigma_w^2+\tau^2)^{1/2} - \bar{\sigma}\right] = 0$　より

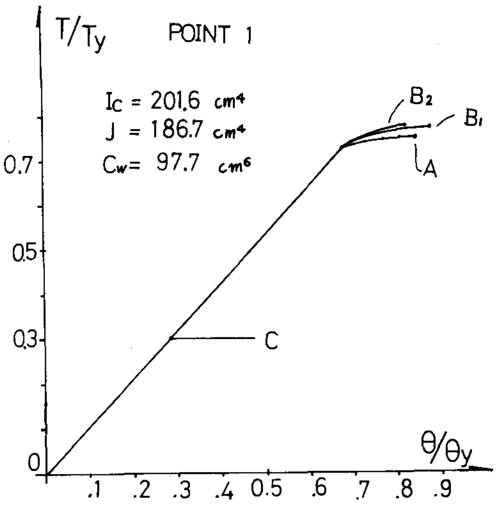
$$\frac{\sigma_w}{\bar{\sigma}}\Delta\sigma_w + \frac{6\tau}{\bar{\sigma}} - H'\Delta\lambda = 0 \text{ ------------ } (11)$$

式(11)に式(1)を、代入し整理すると次式を得る。

$$\Delta\lambda = \frac{E}{\bar{\sigma}} \frac{(\sigma_w \cdot \Delta\varepsilon_w + 3G/E\,\tau\cdot\Delta\gamma)}{\left\{H' + \frac{1}{\bar{\sigma}}(E\sigma_w^2 + 9G\tau^2)\right\}} \text{ ------------ } (12)$$

3．解析例

以上の理論にもとづき、1BOX断面片持ばりの自由端に捩りモーメント ΔT をかけた場合について結果の一部を図-2に示す。



A; f を含み．$d\lambda$ 式は(11)，$H'=0.032E$，C; f なし

B_1; f を含み．$d\lambda$ 式は(12)，$H'=0$

B_2; f を含み．$d\lambda$ 式は(12)，$H'=0.032E$　　図-2

4．あとがき

以上の結果より、解の早期発散を防ぐための補正関数 Δf の有効性は明らかである。

また、塑性領域での収束計算においては、$\Delta\lambda$ を式(11)の形のまま止めて全体収束計算を行なうことは、解の収束性を鈍化させること、したがって当然のことながら、$\Delta\lambda$ 式は応力式を再導入のうえ整理した式(12)を使用しなければならないと云えよう。

なお、計算結果の詳細については、講演時に説明する。

参考文献

1) komatu. Sakimoto ; Elasto-Plastic Behavior of Thin-Wolled Steel Tubs Under Combina-Forces. PROC. OF. JSCE. NO235. 1975.

2) 太田．藤岡　；　薄肉多室閉断面桁の弾塑性曲げ捩り理論(昭和48年度土木学会西部支部研究発表論文集)

3) 太田．吉村　；　組み合せ負荷を負荷を受ける薄肉多室閉断面桁の弾塑性解析(九大工学集報．[illegible])

4) 太田．藤岡　；　薄肉多室閉断面梁の弾塑性曲げ捩り(その1)　昭和50年 第30回年次学術講演会講演集)

5) Benscoter　；　"A Theory of Torsion Bending for Multicells Beams" Journal. of-Applied Mechanics. vol21No1. p25. 1954

6) O.C. Zienkiewicz　；　Elasto-Plastic Solutions of Engineering Problems 'Inital Stress', Finite Element. Approach　International. Journal for Numerical Melhod in Engneering Vol.1. 75-100.