II ― 2　有限帯板要素法による薄肉閉断面桁の弾塑性解析法（その１）

九州大学　学生員　○田村一美
〃　〃　大塚久哲
〃　正員　太田俊昭

1. まえがき

本研究は、断面一様な薄肉箱桁が、各種の組み合せ負荷を受ける場合の一般的な弾塑性問題を、有限帯板要素法によって解く方法を示したもので、両端単純支持薄肉箱桁橋を取り扱ったものである．

周知のとおり、薄肉箱桁の弾塑性解析法としては、有限要素法やせん断流理論などがあり、前者は、分割要素の増大に伴ない未知数が激増するため、複雑な箱桁橋を対象とする場合に、計算容量上分割数を制約される難があり、後者は、断面形状の変化を考慮しえない欠点がある．これに対して、有限帯板要素法は、本質的には有限要素法と云えるが、未知数を低減する効果を有し、薄肉箱桁橋などの複雑な折板構造に有利な実用解法と云えよう．

この分野に関しては、弾性挙動を取り扱っている研究は質量ともに充実しているが、弾塑性挙動に対するそれは、板ならびにI形桁の局部座屈に関する研究例があるが、薄肉箱桁については著者らの知る限り見受けられない．

2. 解析手法について

有限帯板要素法による弾性挙動の解析手法については、既に確立されている[1]ので説明は省略し、主に塑性挙動の解析手法について述べるものとする．なお，解析モデルは、図－１のような薄肉構造を対象とする．

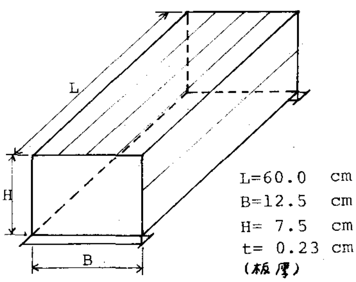


FIG-1

塑性歪増分 $\{\dot{\varepsilon}\}_p$ は，降伏関数を F として，流れ法則により次のように表わせる．

$$\{\dot{\varepsilon}\}_p = \dot{\lambda}\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} \quad (\dot{\lambda}：比例係数) \qquad \text{---}(1)$$

微小変形理論を仮定しているから，弾性歪増分を $[D]^{-1}\{\dot{\sigma}\}$ とすると，全歪増分 $\{\dot{\varepsilon}\}$ は，

$$\{\dot{\varepsilon}\} = [D]^{-1}\{\dot{\sigma}\} + \dot{\lambda}\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}, \quad これより， \quad \{\dot{\sigma}\} = [D]\{\dot{\varepsilon}\} - \dot{\lambda}[D]\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} \qquad (2),(3)$$

ここに，

$$\dot{\lambda} = \frac{\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T [D]\{\dot{\varepsilon}\}}{H' + \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T [D]\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}} \qquad (H'：歪硬化係数) \qquad \text{---}(4)$$

さて，(3)式を平面応力場の σ_x, σ_y および τ_{xy} で成分表示すると，

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_x \\ \dot{\sigma}_y \\ \dot{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ 2\dot{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{S_0}\begin{bmatrix} S_1^2 & S_1 S_2 & S_1 S_3 \\ & S_2^2 & S_2 S_3 \\ \mathrm{S.YM.} & & S_3^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ 2\dot{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (5),(6)$$

ここに

$$S_1 = \frac{E}{3(1-\nu^2)}\{(2\sigma_x - \sigma_y) + \nu(2\sigma_y - \sigma_x)\}, \quad S_2 = \frac{E}{3(1-\nu^2)}\{\nu(2\sigma_x - \sigma_y) + (2\sigma_y - \sigma_x)\}$$

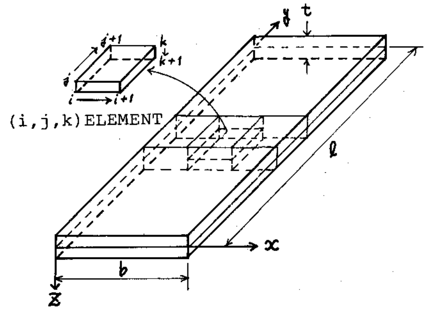
$$S_3 = \frac{E}{1+\nu}\tau_{xy}, \quad S_0 = \frac{4H'}{9}\sigma_e^2 + \left(\frac{2\sigma_x - \sigma_y}{3}\right)S_1 + \left(\frac{2\sigma_y - \sigma_x}{3}\right)S_2 + 2\tau_{xy}S_3 \qquad (\sigma_e：相当応力)$$

ここで，図－２の分割要素（i,j,k）が塑性応力場になったと仮定すれば，（６）式の$\Delta\{\sigma\}$をフーリエ展開しておく必要がある．すなわち，

$$\left.\begin{aligned}\Delta\sigma_x(i,j,k) &= \sum_n \Delta\sigma_{xn}(i,j,k)\sin k_n y\\ \Delta\sigma_y(i,j,k) &= \sum_n \Delta\sigma_{yn}(i,j,k)\sin k_n y\\ \Delta\tau_{xy}(i,j,k) &= \sum_n \Delta\tau_{xyn}(i,j,k)\cos k_n y\end{aligned}\right\} \quad \text{———}(7)$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned}\Delta\sigma_{xn}(i,j,k) &= \frac{2}{l}\int_{i,j,k}\Delta\sigma_x \sin k_n y\, dy\\ \Delta\sigma_{yn}(i,j,k) &= \frac{2}{l}\int_{i,j,k}\Delta\sigma_y \sin k_n y\, dy\\ \Delta\tau_{xyn}(i,j,k) &= \frac{2}{l}\int_{i,j,k}\Delta\tau_{xy}\cos k_n y\, dy\end{aligned}\right\} \quad \text{———}(8)$$



STRIP ELEMENT

FIG-2

以上により，変形が微小で面内と面外の変形の連成がないものとすると，最小ポテンシャルエネルギーの原理を使って次に示す関係式を得る．[1),2)]

$$\text{面内：}\quad t\,\mathbb{K}_{pm}\dot{\delta}_{pm} - \frac{t}{2}\sum_i\sum_j\sum_k \dot{\mathbb{L}}_{pm(i,j,k)} - \dot{F}^L_{pm} - \dot{F}_{pm} = 0 \qquad \text{————}(9)$$

$$\text{面外：}\quad \mathbb{K}_{bm}\dot{\delta}_{bm} - \sum_i\sum_j\sum_k \dot{\mathbb{L}}_{bm(i,j,k)} - \dot{F}^L_{bm} - \dot{F}_{bm} = 0 \qquad \text{————}(10)$$

ここに，$\mathbb{K}_{pm}$, $\mathbb{K}_{bm}$ は弾性時と同じ面内および面外剛性マトリックス，$\dot{F}^L_{pm}$, $\dot{F}^L_{bm}$ は節線荷重マトリックス，$\dot{F}_{pm}$, $\dot{F}_{bm}$ は要素内の荷重マトリックス，$\dot{\delta}_{pm}$, $\dot{\delta}_{bm}$ は変位マトリックスであり，$\mathbb{K}_{pm}$, $\mathbb{K}_{bm}$, $\dot{\mathbb{L}}_{pm}$, $\dot{\mathbb{L}}_{bm}$ はそれぞれ慣用の記号を用いて次のように表わせる．[1),2)]

$$\mathbb{K}_{pm} = \int_0^l\int_0^b \mathbb{B}_{pm}^T\,\mathbb{D}\,\mathbb{B}_{pm}\,dx\,dy\ ,\qquad \mathbb{K}_{bm} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \mathbb{B}_{pm}^T\,\mathbb{H}_{bm}^T\,\mathbb{D}\,\mathbb{H}_{bm}\,dx\,dy\,dz \qquad \text{————}(11),(12)$$

$$\dot{\mathbb{L}}_{pm(i,j,k)} = \int_0^l\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbb{B}_{pm}^T \begin{Bmatrix}\Delta\sigma_{xm}(i,j,k)\sin k_m y\\ \Delta\sigma_{ym}(i,j,k)\sin k_m y\\ \Delta\tau_{xym}(i,j,k)\cos k_m y\end{Bmatrix} dx\,dy \qquad \text{————}(13)$$

$$\dot{\mathbb{L}}_{bm(i,j,k)} = \int_{z_k}^{z_{k+1}}\int_0^l\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbb{B}_{bm}^T\,\mathbb{H}_b \begin{Bmatrix}\Delta\sigma_{xm}(i,j,k)\sin k_m y\\ \Delta\sigma_{ym}(i,j,k)\sin k_m y\\ \Delta\tau_{xym}(i,j,k)\cos k_m y\end{Bmatrix} dx\,dy\,dz \qquad \text{————}(14)$$

実際の解法は，*Initial Stress Method* などの収束計算によって行なわれることになる．

参考文献

1) Y.K. Cheung : *Analysis of Curved Box Girder Bridges by Finite Strip Method*, International Association for Bridges and Structual Engeneering Publications (1971)

2) O.C. Zienkiewicz : *Elasto-Plastic Solutions of Engeneering Problems 'Initial Stress' Finite Element Approach*, Int.J. for Numerical Method in Eng. (1969)