I—21 線形加速度法における誤差軽減

熊本大学 正員 ○平井一男
熊本大学 正員 水田洋司

はじめに.

一般に多質点系の運動方程式を逐次積分法で解く方法としては、線形加速度法(=∠.A.M.), Newmarkのβ法, Willsonのθ法等がある。しかし、これらの方法で求められたレスポンスは、いずれもある仮定を設けて近似的に解いているため,解析手法としての誤差を含む。この誤差のために、発散・減衰・位相遅れ等が生じる。本報では、線形加速度法を取り上げて、加速度を線形と仮定したことによる誤差外力, さらにその誤差外力によって生じる応答の誤差を軽減する手法について述べ, 数値計算例により誤差軽減の有効性を示す.

線形加速度法の誤差外力(=減衰のない場合)

∠.A.M.は、刻み時間間隔における加速度変化を線形と仮定しているため、時間間隔(h)の任意時間τ($0\leq\tau\leq h$)における加速度変化($\ddot{w}_{n\tau}$)は、次式の様に表わせる.

$$\ddot{w}_{n\tau}=\ddot{w}_{n-1}+\frac{\tau}{h}(\ddot{w}_n-\ddot{w}_{n-1}) \tag{1}$$

また、速度($\dot{w}_{n\tau}$)・変形($w_{n\tau}$)は、

$$\dot{w}_{n\tau}=\dot{w}_{n-1}+\tau\ddot{w}_{n-1}+\frac{\tau^2}{2h}(\ddot{w}_n-\ddot{w}_{n-1}) \tag{2}$$

$$w_{n\tau}=w_{n-1}+\tau\dot{w}_{n-1}+\frac{\tau^2}{2}\ddot{w}_{n-1}+\frac{\tau^3}{6h}(\ddot{w}_n-\ddot{w}_{n-1}) \tag{3}$$

多質点系の運動方程式 $\mathbb{M}\ddot{w}+\mathbb{K}w=\mathbb{F}$ に(1)式~(3)式を代入して任意時間τにおける力の釣合い状態を調べる。

$$\text{左辺}=\mathbb{M}\cdot\left\{\ddot{w}_{n-1}+\frac{\tau}{h}(\ddot{w}_n-\ddot{w}_{n-1})\right\}+\mathbb{K}\cdot\left(w_{n-1}+\tau\dot{w}_{n-1}+\frac{\tau^2}{3}\ddot{w}_{n-1}+\frac{\tau^2}{6}\ddot{w}_n\right)$$

$$=\mathbb{M}\cdot\ddot{w}_{n-1}+\mathbb{K}\cdot w_{n-1}+\tau\left\{\frac{1}{h}\mathbb{M}\cdot(\ddot{w}_n-\ddot{w}_{n-1})+\mathbb{K}\cdot\dot{w}_{n-1}\right\}+\frac{\tau^2}{2}\mathbb{K}\cdot\ddot{w}_{n-1}+\frac{\tau^3}{6h}\mathbb{K}\cdot(\ddot{w}_n-\ddot{w}_{n-1}) \tag{4}$$

$$\text{左辺}-\text{右辺}=\mathbb{M}\cdot\ddot{w}_{n-1}+\mathbb{K}\cdot w_{n-1}-\mathbb{F}_n(\tau)+\tau\left\{\frac{1}{h}\mathbb{M}\cdot(\ddot{w}_n-\ddot{w}_{n-1})+\mathbb{K}\cdot\dot{w}_{n-1}\right\}+\frac{\tau^2}{2}\mathbb{K}\cdot\ddot{w}_{n-1}+\frac{\tau^3}{6h}\mathbb{K}\cdot(\ddot{w}_n-\ddot{w}_{n-1}) \tag{5}$$

ここに, $\mathbb{M}$:質量マトリックス, $\mathbb{K}$:剛性マトリックス, $\mathbb{F}$:外力ベクトル

運動方程式は、時間間隔内の任意時間においても, 成立するはずであるから、(5)式で生じる値は加速度仮定による力の誤差である。これを誤差外力と呼び, $\mathbb{F}_e(\tau)$で表わす。従って、$\mathbb{F}_e(\tau)$は

$$\mathbb{F}_e(\tau)=\mathbb{A}_0+\tau\mathbb{A}_1+\tau^2\mathbb{A}_2+\tau^3\mathbb{A}_3 \tag{6}$$

ここに, $\mathbb{A}_0=\mathbb{M}\cdot\ddot{w}_{n-1}+\mathbb{K}\cdot w_{n-1}-\mathbb{F}_n(\tau)$ (6a) $\mathbb{A}_1=\frac{1}{h}\mathbb{M}\cdot(\ddot{w}_n-\ddot{w}_{n-1})+\mathbb{K}\cdot\dot{w}_{n-1}$ (6b)

$\mathbb{A}_2=\frac{1}{2}\mathbb{K}\cdot\ddot{w}_{n-1}$ (6c) $\mathbb{A}_3=\frac{1}{6h}\mathbb{K}\cdot(\ddot{w}_n-\ddot{w}_{n-1})$ (6c)

と表わすことができる. (6)式の誤差外力のために、レスポンスは発散あるいは位相遅れを生じる。レスポンスに誤差が生じないためには、$\mathbb{F}_e(\tau)=0$とする必要がある。∠.A.M.では, $\mathbb{F}_e(\tau)=0$を満足するように修正することは、不可能に近いが、誤差外力がレスポンスに及ぼす影響を少なくする事は可能である。

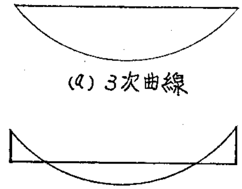
誤差の軽減.

線形加速度法の誤差は、図-1(a)に示す誤差外力のために生じるが、図-1(b)のように誤差外力を修正できれば、誤差応答を多少なりとも消去できることが想像される。この修正は、時間間隔点で $\Delta\mathbb{F}=\mathbb{M}\cdot\Delta\ddot{w}$ なる付加外力を作用させることにより作り出せる。いま, 時間間隔点 $n-1$, n において $\mathbb{M}\cdot\Delta\ddot{w}$ の力を作用させた時 n点で増加する速度・変形は、線形加速度法により次式の様に表わせる。

$\Delta\dot{w}_n=h\cdot\Delta\ddot{w}$ (7a) $\Delta w_n=\frac{h^2}{2}\Delta\ddot{w}$ (7b)

(7)式で示される増加応答量を考慮して、(6)式の誤差外力の積分値が零になるように$\Delta\ddot{w}$を定めると、

$$\Delta\ddot{w}=\left(\mathbb{M}+\frac{h^2}{6}\mathbb{K}\right)^{-1}\left\{\frac{1}{h}\int_0^h F_n(\tau)d\tau-\frac{1}{2}\mathbb{M}\cdot(\ddot{w}_{n-1}+\ddot{w}_n)-\mathbb{K}\cdot\left(w_{n-1}+\frac{h}{2}\dot{w}_{n-1}+\frac{h^2}{8}\ddot{w}_{n-1}+\frac{h^2}{24}\ddot{w}_n\right)\right\} \qquad (8)$$



(a) 3次曲線

(b) 修正後

図-1. 誤差外力曲線

となる。(8)式を(7)式に代入して、補正すべき速度・変形を求めることができる。また、補正加速度は運動方程式を満足するように定めるとすれば、次式で表わせる。

$$\mathbb{M}\cdot\Delta\ddot{w}_n+\frac{h^2}{2}\mathbb{K}\cdot\Delta\ddot{w}=0$$

$$\therefore\ \Delta\ddot{w}_n=-\frac{h^2}{2}\mathbb{M}^{-1}\cdot\mathbb{K}\cdot\Delta\ddot{w} \qquad (9)$$

数値計算例.

図-2に示す1質点モデルについて行なった結果を図-4に表わしている。尚、作用外力は時間に無関係な一定力(図-3)とする。表-1にはモデルの諸元を記している。

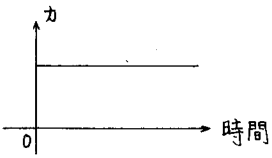


図-3. 作用外力

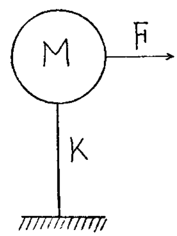


図-2. 1質点モデル

表-1. モデルの諸元

質量 M	1.0 kg·sec²/cm
バネ定数 K	1.0 kg/cm
固有周期 T	6.2832 sec
外力 F	1.0 kg (一定)

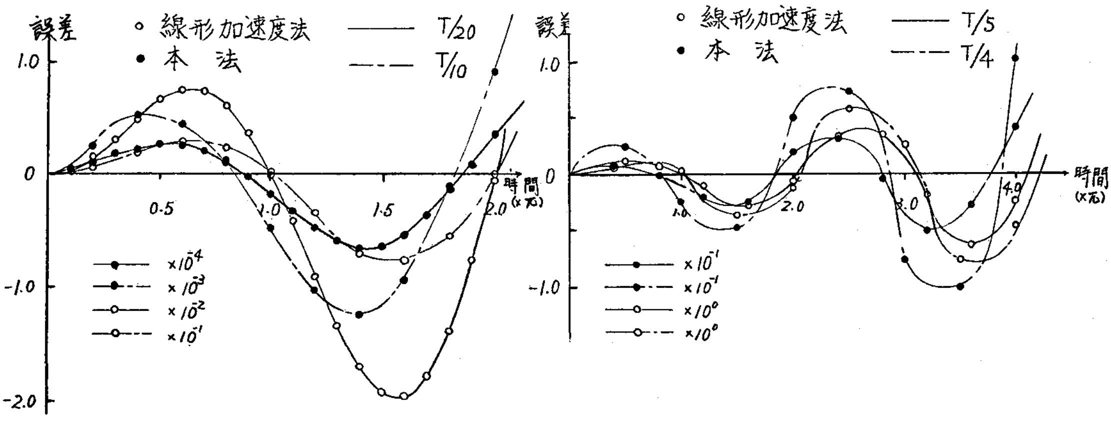


図-4. レスポンスの誤差曲線

おわりに.

数値計算例で見る限りでは、誤差外力を図-1(b)の状態に修正した効果は表われている。図-4に見るように、例えば、線形加速度を用いて時間間隔T/10で計算した時の誤差は、本法を用いて時間間隔T/5で計算した時の誤差と同程度である。また、計算量の面から言えば、本法は線形加速度法に比して、(8)式・(9)式の計算が増すのみである。しかも、(8)式中の$(M+\frac{h^2}{6}K)^{-1}$は、線形加速度の場合と同じであり、新たに計算する必要がない。従って、本法の計算量は、同じ時間間隔の場合、(線形加速度法)×2ではなく、その計算量と思われる。しかし、本法は線形加速度法を基としているため、線形加速度法が発散する時間間隔では、本法も発散する。従って、本法の有効性は、線形加速度法が安定な時間間隔においてのみ、現われる。