I—20　多質点系のレスポンス解析におけるタイムメッシュのとり方について

熊本大学　正員　平井 一男
熊本大学　正員　○水田 洋司

まえがき.

線形加速度法，Newmarkのβ法等の逐次積分法は，時間間隔内で加速度にある仮定を設けて解いているため，結果として異なった外力の作用する系を解いていることに等しく，振幅・位相誤差を生じる。本研究は，前記の誤差を少なくする意味から，加速度をTaylor seriesに展開し，時間間隔内の任意時間における誤差外力が零という条件より係数を定めようとするものである。加速度をTaylor seriesに展開すると，

$$\ddot{w}_{n\tau}=\ddot{w}_{n-1}+\tau C_{1n}+\tau^2C_{2n}+\tau^3C_{3n}+\tau^4C_{4n}+\tau^5C_{5n}+\tau^6C_{6n}+\tau^7C_{7n}+\tau^8C_{8n}+\tau^9C_{9n}+\cdots \quad (1)$$

(1)式を積分して，

$$\dot{w}_{n\tau}=\dot{w}_{n-1}+\tau\ddot{w}_{n-1}+\frac{\tau^2}{2}C_{1n}+\frac{\tau^3}{3}C_{2n}+\frac{\tau^4}{4}C_{3n}+\frac{\tau^5}{5}C_{4n}+\frac{\tau^6}{6}C_{5n}+\frac{\tau^7}{7}C_{6n}+\frac{\tau^8}{8}C_{7n}+\frac{\tau^9}{9}C_{8n}+\frac{\tau^{10}}{10}C_{9n}+\cdots \quad (2)$$

さらに積分して

$$w_{n\tau}=w_{n-1}+\tau\dot{w}_{n-1}+\frac{\tau^2}{2}\ddot{w}_{n-1}+\frac{\tau^3}{6}C_{1n}+\frac{\tau^4}{12}C_{2n}+\frac{\tau^5}{20}C_{3n}+\frac{\tau^6}{30}C_{4n}+\frac{\tau^7}{42}C_{5n}+\frac{\tau^8}{56}C_{6n}+\frac{\tau^9}{72}C_{7n}+\frac{\tau^{10}}{90}C_{8n}+\frac{\tau^{11}}{110}C_{9n}+\cdots \quad (3)$$

これらの展開式を運動方程式 $\mathbb{M}\ddot{w}_{n\tau}+\mathbb{K}w_{n\tau}=F_n(\tau)$ に代入すると，

$$\mathbb{M}\cdot(\ddot{w}_{n-1}+\tau C_{1n}+\tau^2C_{2n}+\tau^3C_{3n}+\cdots+\tau^9C_{9n}+\cdots)+\mathbb{K}\cdot(w_{n-1}+\tau\dot{w}_{n-1}+\frac{\tau^2}{2}\ddot{w}_{n-1}+\frac{\tau^3}{6}C_{1n}+\frac{\tau^4}{12}C_{2n}+\cdots+\frac{\tau^{11}}{110}C_{9n}+\cdots)=F_n(\tau) \quad (4)$$

いま，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{M}\ddot{w}_{n-1}+\mathbb{K}w_{n-1}=A_{0n}\\
&\mathbb{M}C_{1n}+\mathbb{K}\dot{w}_{n-1}=A_{1n}\\
&\mathbb{M}C_{2n}+\tfrac{1}{2}\mathbb{K}\ddot{w}_{n-1}=A_{2n}\\
&\mathbb{M}C_{3n}+\tfrac{1}{6}\mathbb{K}C_{1n}=A_{3n}\\
&\mathbb{M}C_{4n}+\tfrac{1}{12}\mathbb{K}C_{2n}=A_{4n}\\
&\mathbb{M}C_{5n}+\tfrac{1}{20}\mathbb{K}C_{3n}=A_{5n}\\
&\mathbb{M}C_{6n}+\tfrac{1}{30}\mathbb{K}C_{4n}=A_{6n}\\
&\qquad\vdots\\
&\mathbb{M}C_{9n}+\tfrac{1}{72}\mathbb{K}\cdot C_{7n}=A_{9n}\\
&\qquad\vdots\\
&\mathbb{M}C_{in}+\tfrac{1}{i(i-1)}\mathbb{K}\cdot C_{i-2,n}=A_{in}\\
&\qquad\vdots
\end{aligned} \quad (5)$$

とおくと，(4)式は(6)式のように表わせる.

$$A_{0n}+\tau A_{1n}+\tau^2A_{2n}+\cdots+\tau^9A_{9n}+\cdots+\tau^iA_{in}+\cdots=F_n(\tau) \quad (6)$$

ここで，$F_n(\tau)$ を時間間隔内で一定($=F_n$)と仮定し，任意時間τで(6)式の運動方程式が成立するように係数 $C_{in}(i=1\sim?)$ を定める。

第1項　$\mathbb{M}\ddot{w}_{n-1}+\mathbb{K}w_{n-1}=A_{0n}=F_n$
（加速度調整）

第2項　$\mathbb{M}C_{1n}+\mathbb{K}\dot{w}_{n-1}=A_{1n}=0$

$$C_{1n}=(-\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K})\cdot\dot{w}_{n-1}$$

同様にして，

$$\begin{aligned}
&C_{2n}=\frac{1}{2}(-\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K})\cdot\ddot{w}_{n-1} &&C_{3n}=\frac{1}{3!}(-\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K})^2\dot{w}_{n-1}\\
&C_{4n}=\frac{1}{4!}(-\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K})^2\ddot{w}_{n-1} &&C_{5n}=\frac{1}{5!}(-\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K})^3\dot{w}_{n-1}\\
&\qquad\vdots &&\qquad\vdots\\
&C_{2in}=\frac{1}{(2i)!}(-\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K})^i\ddot{w}_{n-1} &&C_{(2i+1)n}=\frac{1}{(2i+1)!}(-\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K})^{i+1}\dot{w}_{n-1}\\
&\qquad\vdots &&\qquad\vdots
\end{aligned} \quad (7)$$

上記の各係数を原式(1)式～(3)式に代入して，加速度，速度・変形を定めることができる。

$$\ddot{w}_{n\tau}=(-\tau\mathbb{X}+\frac{\tau^3}{3!}\mathbb{X}^2-\frac{\tau^5}{5!}\mathbb{X}^3+\frac{\tau^7}{7!}\mathbb{X}^4+\cdots)\dot{w}_{n-1}+(1-\frac{\tau^2}{2!}\mathbb{X}+\frac{\tau^4}{4!}\mathbb{X}^2-\frac{\tau^6}{6!}\mathbb{X}^3+\frac{\tau^8}{8!}\mathbb{X}^4+\cdots)\ddot{w}_{n-1} \quad (8)$$

$$\dot{w}_{n\tau} = \dot{w}_{n-1} + \left(-\frac{\tau^2}{2!}X + \frac{\tau^4}{4!}X^2 - \frac{\tau^6}{6!}X^3 + \frac{\tau^8}{8!}X^4 + \cdots\right) w_{n-1} + \left(\tau - \frac{\tau^3}{3!}X + \frac{\tau^5}{5!}X^2 - \frac{\tau^7}{7!}X^3 + \frac{\tau^9}{9!}X^4 + \cdots\right) \ddot{w}_{n-1} \quad (9)$$

$$w_{n\tau} = w_{n-1} + \left(\tau - \frac{\tau^3}{3!}X + \frac{\tau^5}{5!}X^2 - \frac{\tau^7}{7!}X^3 + \frac{\tau^9}{9!}X^4 + \cdots\right) \dot{w}_{n-1} + \left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^4}{4!}X + \frac{\tau^6}{6!}X^2 - \frac{\tau^8}{8!}X^3 + \frac{\tau^{10}}{10!}X^4 + \cdots\right) \ddot{w}_{n-1} \quad (10)$$

ここに，$X = M^{-1} \cdot K$

(8)式〜(10)式を一般に用いられる記法で表わすと，

$$\ddot{w}_{n\tau} = -X^{\frac{1}{2}} \cdot (\sin \tau \cdot X^{\frac{1}{2}}) \cdot \dot{w}_{n-1} + (\cos \tau \cdot X^{\frac{1}{2}}) \cdot \ddot{w}_{n-1} \quad (11)$$

$$\dot{w}_{n\tau} = (\cos \tau \cdot X^{\frac{1}{2}}) \dot{w}_{n-1} + X^{-\frac{1}{2}} \cdot (\sin \tau \cdot X^{\frac{1}{2}}) \cdot \ddot{w}_{n-1} \quad (12)$$

$$w_{n\tau} = w_{n-1} + X^{-\frac{1}{2}} (\sin \tau X^{\frac{1}{2}}) \dot{w}_{n-1} + X^{-1} (I - \cos \tau X^{\frac{1}{2}}) \cdot \ddot{w}_{n-1} \quad (13)$$

ここに，I＝単位マトリックス

数値計算例.

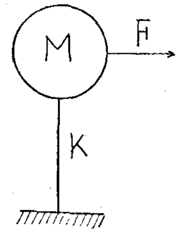

図-1. 1質点系モデル

表-1. モデルの諸元

質量 M	1.0 kg·sec²/cm
バネ定数 K	1.0 kg/cm
固有周期 T	6.2832 sec
外力 F	1.0 kg (一定)

図-1に示す1質点系モデル(表-1の諸元をもつ)を用いて、数値計算を行なった結果について述べる。(8)式〜(10)式を図-1のモデルについて書き表わすと，

$$\left.\begin{aligned} \ddot{w}_{n\tau} &= -\omega \cdot (\sin \omega\tau) \cdot \dot{w}_{n-1} + (\cos \omega\tau)\, \ddot{w}_{n-1} \\ \dot{w}_{n\tau} &= (\cos \omega\tau)\, \dot{w}_{n-1} + \omega^{-1} \cdot (\sin \omega\tau)\, \ddot{w}_{n-1} \\ w_{n\tau} &= w_{n-1} + \omega\, (\sin \omega\tau)\, \dot{w}_{n-1} + \omega^{2} (1 - \cos \omega\tau)\, \ddot{w}_{n-1} \end{aligned}\right\} (a)$$

$X = M^{-1}K = \omega^2$， 従って $X^{\frac{1}{2}} = \omega$(円固有振動数)

となる。(a)式は逐次積分法の式であるが、いま，n-1点をτ=0の点と考え、$\ddot{w}_{n-1} = \ddot{w}_0$，$\dot{w}_{n-1} = \dot{w}_0$(初期条件)とすると，(a)式は，図-1のモデルの運動方程式の微分解と一致する。図-2には，(a)式の三角関数を級数展開((8)式〜(10)式に等しい)して、逐次積分により解を求める時の項数と誤差の関係を、時間間隔τをパラメーターとして表わしたものである。一質点の場合には，時間間隔τは，三角関数の収束状態すなわちτω²に関係するが、多質点の場合には、時間間隔τは、$M^{-1}K$のノルムに関係し，安定な解を与えるτは，(8)式〜(10)式の収束条件によって定まるものと思われる。

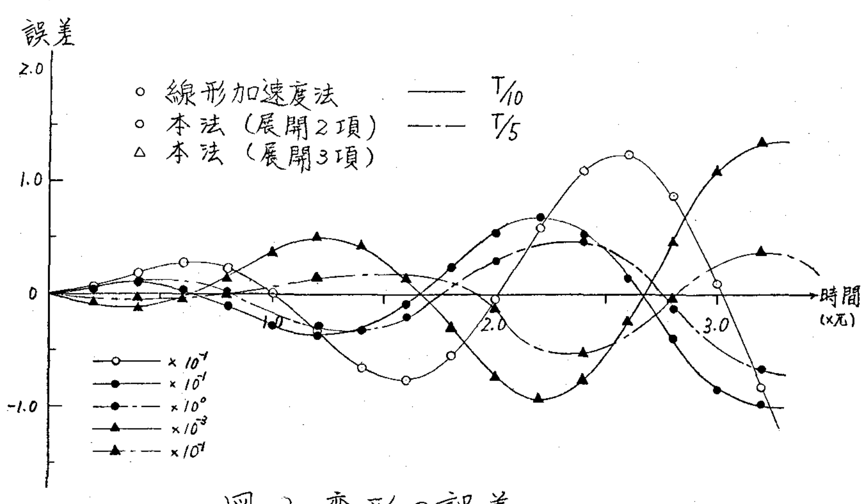

図-2 変形の誤差