I —13　非定常不規則外力を受ける構造物系応答の相関関数

長崎大学　工学部　　正員　　岡林　隆敏

1．はじめに　　構造物に作用する外力が確率過程であると、その応答は確率過程となるために、それは確定論的に評価できない。しかし、不規則振動論によると外力の確率特性と構造物系の動特性より応答の確率特性を求めることができ、この確率特性は確率密度関数を規定する。さらに、系の安全性を評価するために、この確率密度関数を用いて、閾値横断問題、極値分布の推定、最大応答分布の推定、疲労破壊問題等を論ずることができる。ところが、外力がGauss過程であり、構造物系が線形系であると応答はGauss過程となり、この確率密度関数は平均値と分散・共分散により決定される。前報[1]において、外力が非定常なGauss過程である場合、同一時刻における応答の各要素間の分散・共分散を求める基礎式を誘導したが、本研究では同じ外力の場合、異った時刻における応答の要素間の共分散を求める基礎式を誘導した。この両式により、応答の確率密度関数は完全に決定される。

2．基礎理論　　一般に構造物系の運動方程式は状態空間で記述すると、次式になる。$\dot{\mathbb{X}}(t)=\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}(t)+\mathbb{Q}(t)$ ----(1)
ただし、$\mathbb{X}(t)$；n次元変数ベクトル，$\mathbb{A}$；$(n\times n)$の係数行列，$\mathbb{F}(t)$；n次元外力ベクトル。ここで、$\mathbb{F}(t)$を非定常確率過程であるとすると、それは次のように構成することができる[2]。$\mathbb{F}(t)$は狭帯域定常過程$\mathbb{Y}(t)$と形状関数行列$\mathbb{G}(t)$の積によって得られる。$\mathbb{F}(t)=\mathbb{G}(t)\cdot\mathbb{Y}(t)$-------(2)　　$\mathbb{Y}(t)$は狭帯域フィルター系に白色雑音過程が作用して得られる。$\dot{\mathbb{Y}}(t)=\mathbb{B}\cdot\mathbb{Y}(t)+\mathbb{N}(t)$--------(3)　ただし、$\mathbb{Y}(t)$；$m$次元変数ベクトル，$\mathbb{B}$；$(m)^2$の係数行列，$\mathbb{N}(t)$；$m$次元の白色雑音過程ベクトル。構造物系とフィルター系を一つの系と考えると、(1)、(2)、(3)式より、構造物・フィルター系の運動方程式として、次式を得る。　$\dot{\mathbb{Z}}(t)=\mathbb{H}(t)\cdot\mathbb{Z}(t)+\mathbb{Q}(t)$----------(4)

$$\mathbb{Z}(t)=\begin{bmatrix}\mathbb{X}(t)\\ \mathbb{Y}(t)\end{bmatrix},\quad \mathbb{H}(t)=\begin{bmatrix}\mathbb{A} & \mathbb{G}(t)\\ \mathbb{O}_m^n & \mathbb{B}\end{bmatrix},\quad \mathbb{Q}(t)=\begin{bmatrix}\mathbb{O}_n^2\\ \mathbb{N}(t)\end{bmatrix}$$

$\mathbb{Z}(t)$，$\mathbb{H}(t)$，$\mathbb{Q}(t)$は各々次式で示される。ただし、$\mathbb{O}_j^i$，$\mathbb{I}_j^i$は各々i行j列の零行列と単位行列である。

構造物・フィルター系の状態遷移行列を$\Phi_Z(t,S)$とすると、(4)式の解過程は次式で与えられる。

$\mathbb{Z}(S)=\Phi(S,t)\cdot\mathbb{Z}(t)+\int_t^S\Phi(S,\tau)\mathbb{F}(\tau)d\tau$--------(5)　　ただし、$\Phi(S,t)$；$(n+m)^2$の行列，$\mathbb{Z}(S)$；$\mathbb{Z}(t)$の初期条件である。$\mathbb{Z}(t)$の異った時刻における共分散は次式で定義される。$\mathbb{R}_Z(S,t)=E[\mathbb{Z}(S)\mathbb{Z}(t)^T]$　$(S\geq t)$------(6)
ただし、$E[\ ]$；数学平均を示す記号，^{T}；転置行列の記号。(6)式は(5)式より、$\Phi(t,S)$と$\mathbb{F}(t)$の性質を用いると次式となる。ただし、$\mathbb{Z}(t)$の分散$\mathbb{R}_Z(t,t)$として$\mathbb{P}_Z(t)$を用いる。

$\mathbb{R}_Z(S,t)=\Phi_Z(S,t)\cdot\mathbb{P}_Z(t)$　$(S\geq t)$---------(7-1)　　$\mathbb{R}_Z(S,t)=\mathbb{P}_Z(S)\cdot\Phi(t,S)^T$　$(S<t)$--------(7-2)

したがって、異った時刻における$\mathbb{Z}(t)$の共分散$\mathbb{R}_Z(S,t)$は、同一時刻における$\mathbb{Z}(t)$の分散・共分散$\mathbb{P}_Z(t)$と系の状態遷移行列が得られると計算できる。しかし、求める値は$\mathbb{X}(t)$の共分散$\mathbb{R}_X(S,t)$であるので、(7-1)、(7-2)式を次のように変形する。$\mathbb{R}_Z(S,t)$および$\Phi_Z(S,t)$は定義より次式のように分割される。すると(7)式は次式になる。

$$\mathbb{R}_Z(S,t)=\left[\begin{array}{c|c}\mathbb{R}_X(S,t) & \mathbb{R}_{XY}(S,t)\\ \hline \mathbb{R}_{YX}(S,t) & \mathbb{R}_Y(S,t)\end{array}\right]\qquad \Phi_Z(S,t)=\left[\begin{array}{c|c}\Phi_X(S,t) & \Phi_{XY}(S,t)\\ \hline \Phi_{YX}(S,t) & \Phi_Y(S,t)\end{array}\right]\qquad \mathbb{P}_Z(t)=\left[\begin{array}{c|c}\mathbb{P}_X(t) & \mathbb{P}_{XY}(t)\\ \hline \mathbb{P}_{YX}(t) & \mathbb{P}_Y(t)\end{array}\right]$$

$$\mathbb{R}_X(S,t)=\{\Phi_X(S,t)\ \vdots\ \Phi_{XY}(S,t)\}\{\mathbb{P}_X(t)\ \vdots\ \mathbb{P}_{YX}(t)\}^T\qquad (S\geq t)\qquad (8-1)$$

$$\mathbb{R}_X(S,t)=\{\mathbb{P}_X(S)\ \vdots\ \mathbb{P}_{YX}(S)\}\{\Phi_X(t,S)\ \vdots\ \Phi_{XY}(t,S)\}^T\qquad (S<t)\qquad (8-2)$$

$\mathbb{Z}(t)$の分散、共分散$\mathbb{P}_Z(t)$の計算は前報[1]において論じたので、本報では$\Phi_Z(t,S)$の計算について言及する。
$\Phi_Z(S,t)$の定義より、それは次式で与えられる。　　$\dot{\Phi}_Z(S,t)=\mathbb{H}(t)\ \Phi_Z(t)$------(9)
ただし、$\Phi_Z(S,S)=\mathbb{I}_{n+m}^{n+m}$である。これを各要素について記述すると次式になる。

$$\dot{\Phi}_X(S,t)=\mathbb{A}\cdot\Phi_X(S,t) \quad \text{------ (10-1)} \qquad \dot{\Phi}_{XY}(S,t)=\{\mathbb{A} \mid \mathbb{G}(t)\}\{\Phi_{XY}(S,t) \mid \Phi_Y(S,t)\}^T \quad \text{---- (10-2)}$$

$$\dot{\Phi}_Y(S,t)=\mathbb{B}\cdot\Phi_Y(S,t) \quad \text{------- (10-3)}$$

初期条件 $\Phi_X(S,S)=\mathbb{I}_n^n$, $\Phi_{XY}(S,S)=\mathbb{O}_n^m$, $\Phi_Y(S,S)=\mathbb{I}_m^m$

前報[(1)]より $\mathbb{P}_Z(t)$ に関する式を記述すれば次式になる。

$$\dot{\mathbb{P}}_X(t)=\{\mathbb{A} \mid \mathbb{G}(t)\}\{\mathbb{P}_X(t) \mid \mathbb{P}_{YX}(t)\}^T+\{\mathbb{P}_X(t) \mid \mathbb{P}_{XY}(t)\}\{\mathbb{A}^T \mid \mathbb{G}(t)^T\}^T \quad \text{-------- (11-1)}$$

$$\dot{\mathbb{P}}_{YX}(t)=\{\mathbb{A} \mid \mathbb{G}(t)\}\{\mathbb{P}_{XY}(t) \mid \mathbb{P}_Y(t)\}^T+\mathbb{P}_{XY}(t)\,\mathbb{B}^T \quad \text{--------- (11-2)}$$

フィルター条件 ; $\mathbb{B}\cdot\mathbb{P}_Y(t)+\mathbb{P}_Y(t)\,\mathbb{B}^T+\mathbb{S}=\mathbb{O}_m^n$ --------- (11-3)

初期条件 $\mathbb{P}_X(0)=\mathbb{O}_n^n$, $\mathbb{P}_{XY}(0)=\mathbb{O}_m^n$ ただし、$\mathbb{S}$ は $\mathbb{N}(t)$ の分散・共分散である。

このように、(10)式、(11)式は微分方程式で記述され、これらの解が得られると、(8)式より $\mathbb{R}_X(S,t)$ は計算される。したがって、任意の非定常外力に対しても、(2)、(3)式のモデル化が可能であれば、これは数値計算が可能である。

3. 白色雑音過程が単位階段関数で変調された外力が作用する1自由度系の共分散

1自由度系の運動方程式は次式で記述される。 $\ddot{x}(t)+2\rho\omega\dot{x}(t)+\omega^2x(t)=y(t)$ ------- (12)

ただし、ρ ; 減衰定数, ω ; 固有円振動数。外力 $y(t)$ は次式で与えられる。 $y(t)=u(t)\cdot n(t)$ ----- (13)

ただし、$u(t)$; 単位階段関数, $n(t)$; 分散が σ^2 の白色雑音過程。(4)式の $\mathbb{H}(t)$, $\mathbb{F}(t)$ は次式で示される。

$$\mathbb{H}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & -2\rho\omega\end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}(t)=\begin{bmatrix}0\\ n(t)\end{bmatrix}$$

したがって、(10)式より変数は $\mathbb{P}_X(t)$ であり、各要素は次式で与えられる。

$\dot{E}[x_1^2]=2E[x_1\cdot x_2]$ ------- (14-1) $\dot{E}[x_1\cdot x_2]=-\omega^2E[x_1^2]-2\rho\omega E[x_1x_2]+E[x_2^2]$ ------- (14-2) $\dot{E}[x_2^2]=-2\omega^2E[x_1\cdot x_2]-4\rho\omega E[x_2^2]+\sigma^2$ ------ (14-3)

初期条件 $E[x_1(0)^2]=E[x_1(0)\cdot x_2(0)]=E[x_2(0)^2]=0$ ただし、$x=x_1$, $\dot{x}=x_2$ である。(14)式の解は次式になる。

$$E[x_1^2]=(\sigma^2/4\rho\omega^3)[1-(1/\bar{\omega}^2)e^{-2\rho\omega t}\{\bar{\omega}^2+\rho\omega\bar{\omega}\sin 2\bar{\omega}t-2(\rho\omega\sin\bar{\omega}t)^2\}] \quad \text{------- (15-1)}$$

$$E[x_1x_2]=(\sigma^2/2\bar{\omega}^2)\,e^{-2\rho\omega t}\sin 2\bar{\omega}t \quad \text{------- (15-2)}$$

$$E[x_2^2]=(\sigma^2/4\rho\omega)[1-(1/\bar{\omega}^2)e^{-2\rho\omega t}\{\bar{\omega}^2-\rho\omega\bar{\omega}\sin 2\bar{\omega}t+2(\rho\omega\sin\bar{\omega}t)^2\}] \quad \text{------- (15-3)}$$

ただし、$\bar{\omega}=(1-\rho^2)^{1/2}\omega$ 。次に(10)式より状態遷移行列 $\Phi_X(t,S)$ をもとめる。各要素は次式で与えられる。

$$\Phi_X(S,t)=\begin{bmatrix} e^{-\rho\omega(S-t)}\{\cos\bar{\omega}(S-t)+(\rho\omega/\bar{\omega})\sin\bar{\omega}(S-t)\} & (1/\bar{\omega})e^{-\rho\omega(S-t)}\sin\bar{\omega}(S-t)\\ -(\omega^2/\bar{\omega})e^{-\rho\omega(S-t)}\sin\bar{\omega}(S-t) & e^{-\rho\omega(S-t)}\{\cos\bar{\omega}(S-t)-(\rho\omega/\bar{\omega})\sin\bar{\omega}(S-t)\}\end{bmatrix} \quad \text{----- (16)}$$

(10)、(11)式と(8)式の関係に対応する(15)、(16)式より次の共分散 $\mathbb{R}_X(S,t)$ を得る。

$$R_{x_1}(S,t)=(\sigma^2/4\rho\omega^3)[e^{-\rho\omega|S-t|}\{\cos\bar{\omega}(S-t)+\alpha\sin\bar{\omega}|S-t|\}-e^{-\rho\omega(S+t)}\{\cos\bar{\omega}(S-t)+\alpha\sin\bar{\omega}(S+t)+2\alpha^2\sin\bar{\omega}t\sin\bar{\omega}S\}] \quad \text{(17-1)}$$

$$R_{x_1x_2}(S,t)=-(\beta\sigma^2/4\rho\omega^2)[e^{-\rho\omega|S-t|}\sin\bar{\omega}|t-S|-e^{-\rho\omega(S+t)}\{\sin\bar{\omega}|t-S|+2\alpha\sin\bar{\omega}t\sin\bar{\omega}S\}] \quad \text{(17-2)}$$

$$R_{x_2x_1}(S,t)=-(\beta\sigma^2/4\rho\omega^2)[e^{-\rho\omega|S-t|}\sin\bar{\omega}|S-t|-e^{-\rho\omega(S+t)}\{\sin\bar{\omega}|S-t|+2\alpha\sin\bar{\omega}t\sin\bar{\omega}S\}] \quad \text{(17-3)}$$

$$R_{x_2^2}(S,t)=(\sigma^2/4\rho\omega)[e^{-\rho\omega|S-t|}\{\cos\bar{\omega}(S-t)-\alpha\sin\bar{\omega}|S-t|\}-e^{-\rho\omega(S+t)}\{\cos\bar{\omega}(S-t)-\alpha\sin(S+t)+2\alpha^2\sin\bar{\omega}t\sin\bar{\omega}S\}] \quad \text{(17-4)}$$

本法によれば、本例題のように解析的に解ける場合でも、(14)式の分散・共分散方程式は、Laplace 変換表を用いることにより容易に計算され、さらに、系の状態遷移行列は(16)式で示されるように解析的にもとめられる。したがって、従来のインパルス応答関数を積分する手法と比較すると、分散・共分散応答 $\mathbb{P}_X(t)$ はLaplace変換表よりもとまり、さらに $\mathbb{R}_X(S,t)$ は代数演算よりもとめられるので、本法は極めて容易に計算されることがわかる。複雑な非定常問題の解析は、従来の積分手法による解析では不可能であり、本法で示したように、同一時刻における分散・共分散および異った時刻における共分散の時間的進化は微分方程式の形式で記述し、計算機による数値解析を行なわなければならない。

4. 相関のある雑音過程が半正弦波形で変調された外力が作用した場合

自己相関関数が $R_y(\tau)=\sigma^2e^{-\beta|\tau|}\cos\Omega\tau$ である雑音過程が半正弦波形で変調された外力について考える。応答の共分散 $\mathbb{R}_X(S,t)$ について数値計算を行ったが、この結果については講演時に発表する。

〔参考文献〕(1) 岡林、第30回年次講演会 昭和50年10月. PP. 320～321 (2) 岡林・江頭・江良 昭和50年度土木学会西部支部研究発表会.