I—11 非定常不規則外力を受ける構造物系の分散・共分散応答（第一報 基礎理論）

長崎大学 工学部 正員 岡林隆敏
長崎大学 工学部 ○学生員 古川 毅
長崎大学 工学部 学生員 江島 修

1．序論　土木構造物に作用する多くの外力は、地震外力、風荷重、波浪による荷重のように再現性のない不規則な荷重である。さらに、地震動は振幅の包絡線ばかりでなく、波形の周期が時間とともに変化する非定常確率過程とみなされている。近年、非定常パワースペクトラム分析の理論発展に伴って、その非定常性が明らかになりつつある。[1][2] 従来このような非定常外力が作用した構造物系の応答解析は、非定常外力を振幅の包絡線を示す形状関数と特定のパワースペクトラムをもつ定常過程の積と見なしていた。しかし、この解析では、外力の周波数特性の時間的変化が応答に及ぼす影響を考慮できない。すでに複雑な非定常外力に対する分散・共分散応答は、共分散方程式を用いて容易に解析できることを示したが、[3] 本研究では、一般的な非定常外力が作用する構造物系の分散・共分散応答解析のための基礎式を誘導した。さらに、地震動としてＥＬＣＥＮＴＲＯ 1940 ＮＳを用いて、このモデル化を行い[4]、３種の地震動モデルに対して、構造物系を一自由度系と仮定して、分散・共分散応答を求めた。特にパワースペクトラムが時間とともに変化するモデルに対して、この変化に応答に及ぼす影響を、他のモデルによる解析と比較し、この解析の妥当性を検討する。

2．外力のモデル化

非定常パワースペクトラムの理論によると、非定常確率過程は、狭帯域の周波数特性をもつ互に独立な定常過程が、その成分の時間的変化を示す時間関数、すなわち、形状関数で変調された関数の和として表される。ところで、狭帯域定常過程は近似的に白色雑音過程が狭帯域フィルター系に作用して得られると考えられる。フィルター系は通常微分方程式で記述され、定常過程はその定常解過程となる。非定常過程をベクトルとして、より一般的に記述すると、非定常過程は次式で表すことができる。 $\mathbb{F}(t)=\mathbb{G}(t)\cdot\mathbb{Y}(t)$ (1)　$\dot{\mathbb{Y}}(t)=\mathbb{B}\cdot\mathbb{Y}(t)+\mathbb{N}(t)$ $(t\to\infty)$ (2)　ただし、$\mathbb{F}(t)$; n次元非定常過程ベクトル, $\mathbb{G}(t)$; $(n\times m)$の形状関数行列, $\mathbb{Y}(t)$; m次元の任意のパワースペクトラムをもつ定常過程ベクトル, $\mathbb{B}$; $\mathbb{Y}(t)$の特性を決定するフィルター系の$(m)^2$の係数行列, $\mathbb{N}(t)$; m次元の互に独立な白色雑音過程ベクトル, $\mathbb{N}(t)$が白色雑音過程であれば数学的に(2)式の表現はできないが、形式的にこの式を用いる。地震動のモデル化を行なうために、次のようなパワースペクトラムをもつ定常過程を考える。 $S_{y_i}(\omega)=\sigma_i^2\cdot 2\beta_i\cdot(\beta_i^2+\Omega_i^2+\omega^2)/\{(\beta_i^2+\Omega_i^2+\omega^2)^2+4\beta_i^2\omega^2\}$ (3)　これは次のフィルター方程式の定常解過程として得られる。$y(t)_i=\sigma_i\sqrt{2\beta_i}(-\dot{g}_i+\sqrt{\beta_i^2+\Omega_i^2}\,g_i)$ (4−1)　$\ddot{g}_i+2\beta_i\dot{g}_i+(\beta_i^2+\Omega_i^2)g_i=n_i(t)$ (4−2)

ただし、σ_i, β_i, Ω_i はフィルターのパラメーター, $n_i(t)$ は平均値が0、分散1の白色雑音過程。

ここで地震波形のモデルとして、次の３種を考える。(i) ＮＯ．１ モデル $f(t)=g(t)\cdot y(t)$ パワースペクトラムのピークが一個ある定常過程$y(t)$が形状関数$g(t)$で変調される場合。(ii) ＮＯ．２モデル $f(t)=g(t)\sum_{i=1}^{N}y_i(t)$ Ｎ個の狭帯域過程より、パワースペクトラムのピークがＮ個ある定常過程を構成し、各々が同一の形状関数$g(t)$で変調される場合。(iii) ＮＯ．３ モデル $f(t)=\sum_{i=1}^{N}g_i(t)\cdot y_i(t)$ ＮＯ.２と同じくＮ個の定常過程を構成し、形状関数$g_i(t)$としては、地震波形の周波数成分がもつエネルギー包絡線を考え、各々の積を合成した場合。このモデルの周波数特性は時間とともに変化する。

3．共分散方程式の誘導

外力$\mathbb{W}(t)$を受ける系の運動方程式は、一般に次式で表わされる。

$\dot{\mathbb{X}}(t)=\mathbb{A}(t)\cdot\mathbb{X}(t)+\mathbb{W}(t)$ (5)　ただし、$\mathbb{X}(t)$, $\mathbb{W}(t)$; n次元ベクトル, $\mathbb{A}(t)$; $(n)^2$の係数行列。$\mathbb{W}(t)$は次式で示される確率特性を持つ白色雑音過程。 $E[\mathbb{W}(t)]=\mathbb{O}$, $E[\mathbb{W}(t)\cdot\mathbb{W}(\tau)^T]=\mathbb{Q}(t)\delta(t-\tau)$

ところで、(5)式の解は線形微分方程式の理論より次式になる。 $\mathbb{X}(t)=\Phi(t,\tau)\mathbb{X}(\tau)+\int_{\tau}^{t}\Phi(t,\sigma)\mathbb{N}(\sigma)d\sigma$ (6)

ただし，$\Phi(t,\sigma)$ は $(n)^2$ の状態遷移行列。$\Phi(t,\tau)$ の性質は次に示す。$\dot{\Phi}(t,\tau)=\mathbb{A}(t)\Phi(t,\tau)$，$\Phi(\tau,\tau)=\mathbb{I}$（単位行列）
$\Phi(t,\tau)^{-1}=\Phi(\tau,t)$，$\Phi(t_2,\tau)=\Phi(t_2,t_1)\cdot\Phi(t_1,\tau)$

(i) $\mathbb{X}(t)$ の期待値 $E[\mathbb{X}(t)]=\Phi(t,\tau)E[\mathbb{X}(\tau)]$ (7)　(ii) $\mathbb{X}(t)$ の共分散 $\mathbb{R}_{\mathbb{X}}(t)=E[(\mathbb{X}(t)-E[\mathbb{X}(t)])(\mathbb{X}(t)-E[\mathbb{X}(t)])^T]$ (8)

(8)式に(6)(7)を考慮すると次式になる。　$\mathbb{R}_{\mathbb{X}}(t)=\Phi(t,\tau)\mathbb{R}(\tau)\Phi(t,\tau)^T+\int_\tau^t\Phi(t,\sigma)\mathbb{Q}(\sigma)\Phi(t,\sigma)^T d\sigma$　(9)

ただし，$\mathbb{R}_{\mathbb{X}}(t)$；$(n)^2$の行列。(9)式を t について微分し，遷移行列の性質を用いると，次の共分散方程式を得る。

$\dot{\mathbb{R}}_{\mathbb{X}}(t)=\mathbb{A}(t)\cdot\mathbb{R}_{\mathbb{X}}(t)+\mathbb{R}_{\mathbb{X}}(t)\mathbb{A}(t)^T+\mathbb{Q}(t)$　(10-1)　初期条件　$\mathbb{R}(\tau)=E[(\mathbb{X}(\tau)-E[\mathbb{X}(\tau)])(\mathbb{X}(\tau)-E[\mathbb{X}(\tau)])^T]$　(10-2)

4. 基礎方程式の誘導

構造物系の運動方程式を改めて次式で記述する。

$\dot{\mathbb{X}}(t)=\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}(t)+\mathbb{F}(t)$　(11)　ただし，$\mathbb{X}(t)$；n次式変数ベクトル，$\mathbb{F}(t)$；n次元外力ベクトル，$\mathbb{A}(t)$；$(n)^2$の係数行列。2で示したように非定常外力は(1)式と(2)式で構成される。(1)(2)(11)式は一つの系，すなわち構造物・フィルター系と考え，次のような変数 $\mathbb{Z}(t)$ を用いると，この系の運動方程式は次式になる。

$\dot{\mathbb{Z}}(t)=\mathbb{H}(t)\cdot\mathbb{Z}(t)+\mathbb{Q}(t)$　(12)　ただし，$\mathbb{Z}(t)$, $\mathbb{H}(t)$, $\mathbb{Q}(t)$ は次式で示される。

$$\mathbb{Z}(t)=\begin{bmatrix}\mathbb{X}(t)\\ \mathbb{Y}(t)\end{bmatrix}\quad(13\text{-}1)\qquad \mathbb{H}(t)=\left[\begin{array}{c:c}\mathbb{A}(t) & \mathbb{G}(t)\\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{B}\end{array}\right]\quad(13\text{-}2)\qquad \mathbb{Q}(t)=\begin{bmatrix}\mathbb{O}\\ \mathbb{N}(t)\end{bmatrix}\quad(13\text{-}3)$$

(12)式に対応する共分散方程式は，前節より次式になる。　$\dot{\mathbb{R}}_{\mathbb{Z}}(t)=\mathbb{H}(t)\cdot\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}(t)+\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}(t)\cdot\mathbb{H}(t)^T+\mathbb{S}_{\mathbb{Z}}$　(14)

(13-1)の関係より，$\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}(t)$は(15)式になる。さらに $\mathbb{S}_{\mathbb{Z}}$は $\mathbb{Q}(t)$ の共分散行列である。

$$\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}(t)=\begin{bmatrix}\mathbb{R}_{\mathbb{X}}(t) & \mathbb{R}_{\mathbb{X}\mathbb{Y}}(t)\\ \mathbb{R}_{\mathbb{Y}\mathbb{X}}(t) & \mathbb{R}_{\mathbb{Y}}(t)\end{bmatrix}\quad(15)$$

ただし，$\mathbb{R}_{\mathbb{X}}(t)$, $\mathbb{R}_{\mathbb{Y}}(t)$は各々 $\mathbb{X}(t)$, $\mathbb{Y}(t)$に関する共分散行列，$\mathbb{R}_{\mathbb{X}\mathbb{Y}}(t)$, $\mathbb{R}_{\mathbb{Y}\mathbb{X}}(t)$は $\mathbb{X}(t)$ と $\mathbb{Y}(t)$ に関する共分散行列であり，共分散行列の性質より$\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}(t)$は対称行列である。さらにフィルター系の方程式(2)式より，この式に対応する共分散方程式は次式になる。　$\dot{\mathbb{R}}_{\mathbb{Y}}(t)=\mathbb{B}\,\mathbb{R}_{\mathbb{Y}}(t)+\mathbb{R}_{\mathbb{Y}}(t)\mathbb{B}^T+\mathbb{S}_{\mathbb{Y}}$　(16)

しかし，フィルター系の応答は定常過程であり，(16)式の微分方程式は代数方程式になる。この条件を考慮して，特定の初期条件で(14)式を解けば解が得られる。我々の求める応答は$\mathbb{R}_{\mathbb{X}}(t)$であるので，(14)式を書き改めると，次の基礎方程式が得られる。

$\dot{\mathbb{R}}_{\mathbb{X}}(t)=\{\mathbb{A}\;\vdots\;\mathbb{G}(t)\}\{\mathbb{R}_{\mathbb{X}}(t)\;\vdots\;\mathbb{R}_{\mathbb{Y}\mathbb{X}}(t)\}^T+\{\mathbb{R}_{\mathbb{X}}(t)\;\vdots\;\mathbb{R}_{\mathbb{X}\mathbb{Y}}(t)\}\{\mathbb{A}^T\;\vdots\;\mathbb{G}(t)^T\}^T$　(17-1)

$\dot{\mathbb{R}}_{\mathbb{X}\mathbb{Y}}(t)=\{\mathbb{A}\;\vdots\;\mathbb{G}(t)\}\{\mathbb{R}_{\mathbb{X}\mathbb{Y}}(t)\;\vdots\;\mathbb{R}_{\mathbb{Y}}(t)\}^T+\mathbb{R}_{\mathbb{X}\mathbb{Y}}(t)\cdot\mathbb{B}^T$　(17-2)

フィルター条件　$\mathbb{B}\,\mathbb{R}_{\mathbb{Y}}(t)+\mathbb{R}_{\mathbb{Y}}(t)\,\mathbb{B}^T+\mathbb{S}_{\mathbb{Y}}=\mathbb{O}$　(17-3)

初期条件　$\mathbb{R}_{\mathbb{X}}(\tau)=\mathbb{O}$　$\mathbb{R}_{\mathbb{X}\mathbb{Y}}(\tau)=\mathbb{O}$　(17-4)

5. 計算例

構造物系を一自由度系と仮定すると，運動方程式は次式になる。ただし，ρ；減衰定数

$\ddot{x}+2\rho\omega\dot{x}+\omega^2x=f(t)$　(18)　ω；固有円振動数。外力モデルとしてNO．3を用いて，状態空間で記述すると次式を得る。ただし，$X_1=x$，$X_2=\dot{x}$，他のX_iはフィルター系の変数。

$$\left.\begin{aligned}&\dot{X}_1=X_2\\ &\dot{X}_2=-2\rho\omega X_2-\omega^2X_1+\sum_{i=1}^N g_i(t)\sigma_i\sqrt{2\beta_i}\left(-X_{2i+2}+\sqrt{\beta_i^2+\Omega_i^2}X_{2i+1}\right)\\ &\left.\begin{aligned}&\dot{X}_{2i+1}=X_{2i+2}\\ &\dot{X}_{2i+2}=-2\beta_iX_{2i+2}-(\beta_i^2+\Omega_i^2)X_{2i+1}+n_i(t)\end{aligned}\right\}i=1,N\end{aligned}\right\}\;(19)$$

上式に対応する共分散方程式は次式で与えられるが，この中で構造物系に関係した値は $E[X_1^2]$, $E[X_1\cdot X_2]$, $E[X_2^2]$ である。

$$\begin{aligned}&\dot{E}[X_1^2]=2E[X_1\cdot X_2]\\ &\dot{E}[X_1\cdot X_2]=-\omega^2E[X_1^2]-2\rho\omega E[X_1X_2]+\sum_{i=1}^N g_i(t)\cdot\sigma_i\cdot\sqrt{2\beta_i}\\ &\qquad\cdot\left(\sqrt{\beta_i^2+\Omega_i^2}\,E[X_1X_{2i+1}]-E[X_1X_{2i+2}]\right)+E[X_2^2]\\ &\left.\begin{aligned}&\dot{E}[X_1X_{2i+1}]=E[X_1X_{2i+2}]+E[X_2X_{2i+1}]\\ &\dot{E}[X_1\cdot X_{2i+2}]=-(\beta_i^2+\Omega_i^2)E[X_1X_{2i+1}]-2\beta_iE[X_1X_{2i+2}]+E[X_2X_{2i+2}]\end{aligned}\right\}i=1,N\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&\dot{E}[X_2X_{2i+1}]=-\omega^2E[X_1X_{2i+1}]-2\rho\omega E[X_2\cdot X_{2i+1}]\\ &\qquad+E[X_2X_{2i+2}]+\sigma_i\cdot g_i(t)/2\sqrt{2\beta_i(\beta_i^2+\Omega_i^2)}\\ &\dot{E}[X_2X_{2i+2}]=-\omega^2E[X_1\cdot X_{2i+2}]-2(\rho\omega+\beta_i)\dot{E}[X_2\cdot X_{2i+2}]\\ &\qquad-(\beta_i^2+\Omega_i^2)E[X_2X_{2i+1}]-\sigma_i\,g_i(t)/2\sqrt{2\beta_i}\end{aligned}\right\}i=1,N\;(20)$$

〔参考文献〕(1)亀田弘行，1975．3，土木学会第235号論文報告集 (2)星谷 勝 1975．3，土木学会誌
(3) 岡村 隆敏，昭和50年10月 土木学会第30回年次講演会概要集
(4) 岡林，江頭 江島 昭和50年度 土木学会西部支部研究発表会講演集