

長崎大学工学部 正員 高橋和雄

学生員。山田輝久

1. 緒言 著者ははりおよび薄板などの連続体の非線形振動を多自由度系と仮定して調和バランス法を用いて非線形に伴なう諸現象を解明した。すなわち、変位関数と通常幾何学的境界条件を満足する座標関数と未知の時間関数の積の形の重ね合せの仮定を用い、かつ、残された釣合式に Galerkin 法を適用して、時間に関する連立非線形微分方程式を誘導する。これらの微分方程式に Fourier 級数解析法に基づき調和バランス法によ、こえらるる連立非線形代数方程式を Newton-Raphson 法により数値解析する。各自由度の調波成分の振幅と位相を求めるものである。ここで問題となるのは無限自由度系を多自由度系に置換する場合の近似の度合と調和バランス法の収束であるが、後者については近似の誤差限界評価法の数学的基礎が最近与えられた。前者については多自由度の非線形振動系特有の内部共振が生ずるが否かに左右される。内部共振のない場合には 1 自由度系の場合とほとんど同様に自由度の数および調波の項数について単調な収束が期待できる。これに対して、内部共振のある場合には採用する自由度の数および調波の項数によ、収束の様相が異なることが予想される。そこで、本研究でははりおよび軸対称円板を対象に多自由度系解析法の収束を検討したものである。

2. 基礎式

1) はりの場合：仮定 1) $l \gg r$, 2) $\varepsilon \ll 1$, 3) $u \ll r$, 4) $y = 0(r)$, $|y_x| \ll 1$, $y_x = 0(\varepsilon)$, 5) Bernoulli-Euler の仮定, 6) 軸および回転慣性無視, 7) 両端で軸方向変位拘束

$$P = \frac{E A}{2l} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (1), \quad L(y) = EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P A \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + C \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - P \cos \Omega t = 0 \quad (2)$$

ここに、 y ：はりのたわみ、 E ：ヤング率、 A ：断面積、 I ：断面 2 次モーメント、 l ：スパン、 P ：密度、 C ：粘性抵抗係数、 t ：時間、 P ：外力の荷重強度、 Ω ：外力の円振動数

2) 円板の場合：仮定 1) $a \gg r$, 2) $\varepsilon \ll 1$, 3) $u \ll r$, 4) $w = 0(r)$, $|w_r| \ll 1$, $w_r = 0(\varepsilon)$, 5) Kirchhoff-Love の仮定, 6) 面内・回転慣性無視, 7) 軸対称変形

$$\nabla^4 F = -\frac{E}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (3), \quad L(w, F) = D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + C \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{F}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - P \cos \Omega t = 0 \quad (4)$$

ここに、 F ：Airy の応力関数、 w ：板のたわみ、 $D = E h^3 / [12(1-\nu^2)]$ ：板剛度、 ν ：ポアソン比、 h ：板厚、 r ：半径方向の座標

3. 解法 上述の運動方程式を解くために、たわみ $y(w)$ を次のように変数分離形に仮定する。

$$y = r \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) \quad \text{または} \quad w = h \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \cdot T_n(t) \quad (5)$$

ここに、 $X_n(x)$, $R_n(r)$ ：境界条件を満足する座標関数、 $T_n(t)$ ：未知の時間関数

式(5)の座標関数として線形曲げ振動の規準関数を用いるものとし、2-1)の場合には与えられた面内の境界条件を満足するように応力関数のうへ、残された釣合式(2),(4)に Galerkin 法を適用すれば、

$$\int_0^l L(y) X_n(x) dx = 0 \quad (\text{はりの場合}), \quad \int_0^a L(w, F) R_n(r) dr = 0 \quad (\text{円板の場合}) \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

規準関数に関する直交性、また減衰に対する直交性を仮定すれば、次のような Duffing 形の連立非線形常微分方程式が求められる。

$$\ddot{T}_n + 2\beta_n \dot{T}_n + \gamma_n T_n + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} d_{klm} T_k T_l T_m - \cos \Omega t = 0 \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

式(7)の周期解を次のように Fourier 級数の形に仮定する。

$$T_n = \sum_{j=1,3,5}^{\infty} (a_n^j \cos j\omega t + b_n^j \sin j\omega t) \quad (8) \quad \text{ここに、} a_n^j, b_n^j : \text{未定定数}$$

式(8)を式(7)に代入して、非線形項に含まれる正弦、余弦関数の積を加法定理を用いて展開して $\cos$, $\sin$ の各調波の係数を比較すれば、未定定数 a_n^j, b_n^j に関する非線形連立代数方程式がえられる。任意の振動数 ω に対して Newton

-Raphson法の繰り返し計算を用いて適当な初期値のもとに解けば、 α_n^t, β_n^t を決定することができ、

非減衰の場合には振幅の定義として基本波の絶対値が最大となる時刻 α は、 α より α の中心点の無次元振幅を本題の振幅比として用いれば次のように表わされる。

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \alpha_n^t \quad (9)$$

4. 非線形自由振動に対する計算結果 (a) はりの場合

両端ピン支持では、線形振動の規準関数を用いた変数分離が可能なので、1自由度系の場合と同様になる。これに対して両端固定支持では振幅とともに振動波形が変動するので、多自由度系としての取扱いが本質的である。図-1は1次固有振動数近傍の振動数比 ω と各振幅成分の絶対値 $|\alpha_n^t|$ との関係を半対数グラフにプロットしたものである。図中の実線は1次の基本調波 α_1^t を正としたときの同位相の振幅を示し、点線は逆位相の振幅を示すものである。振動数比 ω が増大すると、1次の基本調波 α_1^t ははじめのときすべての調波成分が必然的に生ずるが、 α_2^t すなわち対称2次振動の第3高調波が $\omega=1.1$ 付近で非線形項を通じて内部共振を起こす。また、 α_5^t すなわち1次振動の第5高調波は単調に増大しないことがわかる。これらの諸現象は1自由度系の振動では見受けられないものである。図-2, 3に振幅比 $A=6.8$ の場合の多自由度系解析法の収束状況と模範をFourier級数の項数 n 、縦軸に振動数比 ω を取り、自由度の数をパラメータに描いた結果を示す。図よりFourier級数の項数 n は

A	(a)	(b)	(c)	(d)
1	1.0222	1.0222	1.0423	1.022
2	1.0854	1.0857	1.1096	1.085
3	1.1824	1.1831	1.2126	1.182
4	1.3049	1.3064	1.3425	1.305
5	1.4468	1.4488	1.4922	1.447
6	1.6046	1.6051	1.6562	1.599
7	1.7771	1.7717	1.8307	1.774
8	1.9672	1.9459	2.0131	

表-1

いては3項程度で収束することがわかるが、自由度の数はFourier級数の項数より多く採用する必要があることがわかる。系を2自由度系と仮定することは多自由度系としての影響を過大に評価していることといえる。表-1はこのようにしてえられた振幅比と振動数比との関係をまとめたものである。また、表-1(b)は1自由度系と仮定のうえ、はりの規準関数を用いた簡円積分による、えられた結果である。(c)は同じく1自由度系の座標波形を用いた結果を示す。(d)は一定の軸力を受けるはりの規準関数を用いて、与えられた初期条件のもとで周期振動が可能であるかを差分法の陽公式による数値実験を行なうことにより求めた。(b)のはりの規準関数を用いた1自由度系の解と ω の多自由度系の解との差は小さいことがわかるが、これは振動波形が変化に伴う振動数の変動の割合が小さいことを示すものである。(c)の座標波形を用いた結果は本法よりも大きな振動数比を示し、振幅の増大とともにその割合が大きくなること

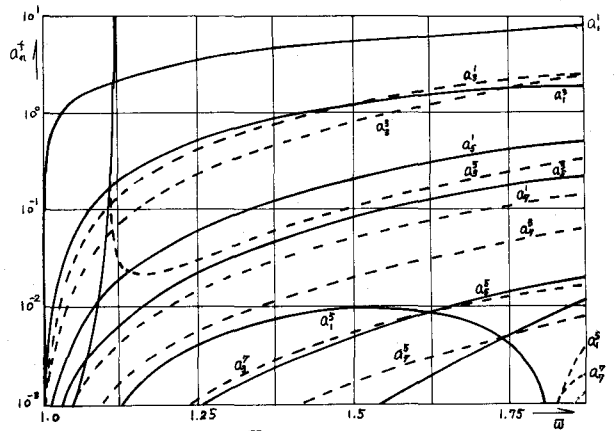


図-1

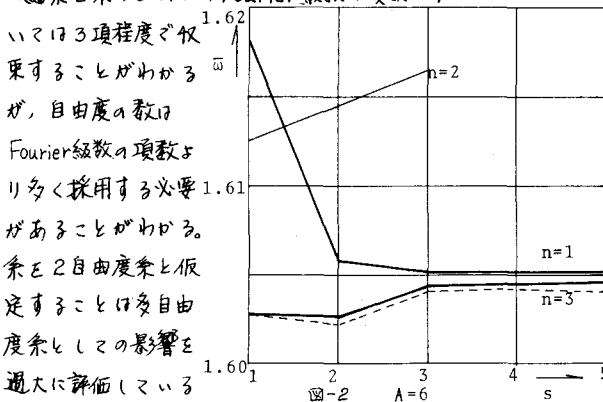


図-2

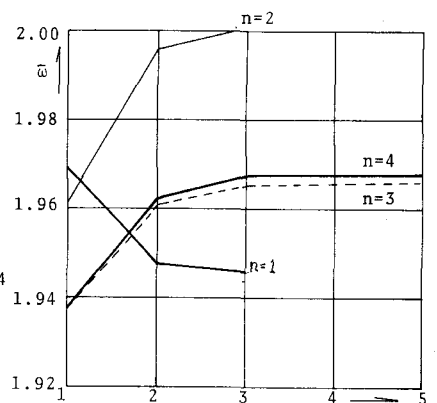


図-3

ことといえる。表-1はこのようにしてえられた振幅比と振動数比

との関係をまとめたものである。また、表-1(b)は1自由度系と仮定のうえ、はりの規準関数を用いた簡円積分による、えられた結果である。(c)は同じく1自由度系の座標波形を用いた結果を示す。(d)は一定の軸力を受けるはりの規準関数を用いて、与えられた初期条件のもとで周期振動が可能であるかを差分法の陽公式による数値実験を行なうことにより求めた。(b)のはりの規準関数を用いた1自由度系の解と ω の多自由度系の解との差は小さいことがわかるが、これは振動波形が変化に伴う振動数の変動の割合が小さいことを示すものである。(c)の座標波形を用いた結果は本法よりも大きな振動数比を示し、振幅の増大とともにその割合が大きくなること

わかる。これは座屈波形が圧縮力による波形で振幅による張力を受ける場合と逆の波形となることに起因するものである。また (d) の差分法による結果と本法の結果はよく合致していることがわかる。

ｂ)円板の場合

軸対称円板を対象に3自由度2項近似の場合の自由の振動数比 $\bar{\omega}$ と振幅比 A との関係を図-4に示す。図において (a) を付した振幅は面内変位拘束の場合を示し、(b) は面内変位自由の場合を示したものである。比較、対照のために、1自由度系の解を付記すれば、図中の実線に示す通りである。図から明らかのように面内変位が自由な円板の振動数比と振幅比との関係について3自由度系の結果と1自由度系の結果には差異がほとんどないことがわかる。しかしながら、2次振動の振幅成分 $\bar{\omega}_2$ および $\bar{\omega}_3$ はかなり大きく、必ずしも両者が同じ結果を与えろとは限らない。すなわち振動数比は両者が合致するが振動波形は1自由度系に仮定した線形振動の波形とはかなり異なることになる。次の面内変位が拘束される場合には振動数比が1.5までは3自由度系と1自由度系の解の間にわずかな差異が見受けられるのみであるが、更に振動数比が増加すると、1次振動の基本振の振幅 $\bar{\omega}_1$ によって2次振動の高調波成分 $\bar{\omega}_2$ が内部共振を起すために、振動数と振幅の関係は1自由度の場合に比較してはるかに複雑になることがわかる。図-5および6に各ケースの振幅比 $A=1.5$ と $A=2.5$ に対する多自由度解析法の収束状況を示す。なお、面内変位拘束($u=0$)の場合については

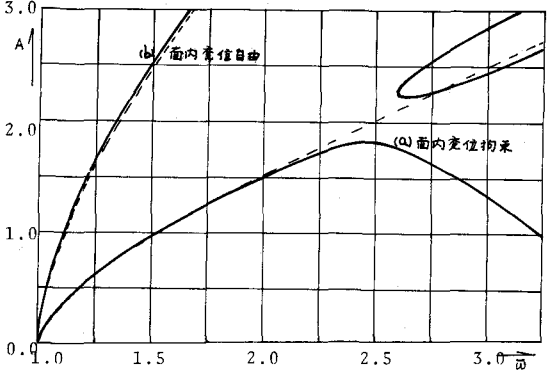


図-4

みであるが、更に振動数比が増加すると、1次振動の基本振の振幅 $\bar{\omega}_1$ によって2次振動の高調波成分 $\bar{\omega}_2$ が内部共振を起すために、振動数と振幅の関係は1自由度の場合に比較してはるかに複雑になることがわかる。図-5および6に各ケースの振幅比 $A=1.5$ と $A=2.5$ に対する多自由度解析法の収束状況を示す。なお、面内変位拘束($u=0$)の場合については

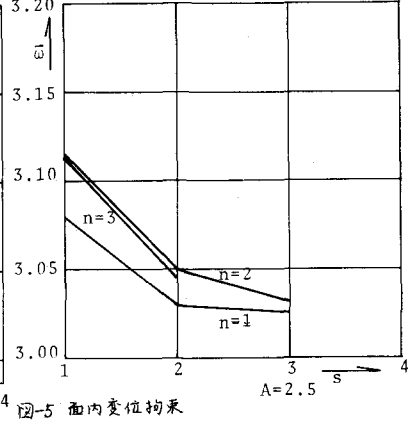
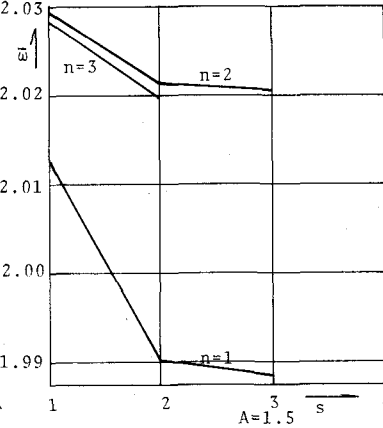


図-5 面内変位拘束

面内変位拘束($u=0$)の場合については

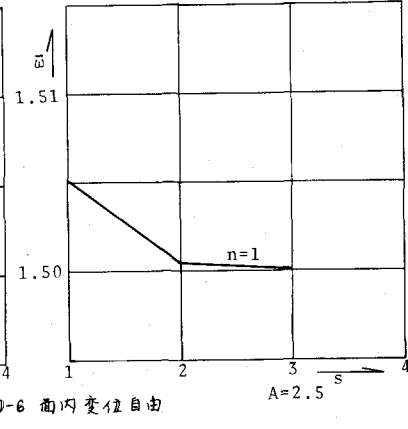
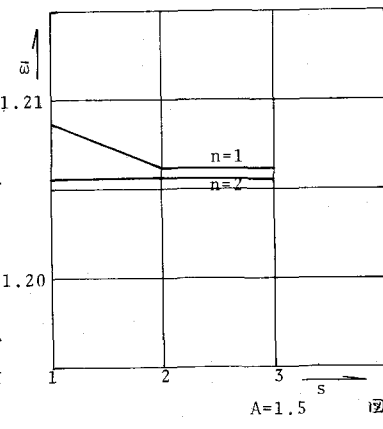


図-6 面内変位自由

$A=2.5$ の解は1自由度の場合の解に近いものを示した。図に示すようにFourier級数の項数について単調に収束することがわかる。円板の解析に必要な自由度と項数については、講演時に発表の予定である。

参考文献 1)高橋; A Multiple Degree-of-Freedom Approach to Nonlinear Free Vibrations of Circular Plates, 長崎大学工学部研究報告第5号, 昭和49年12月, 2) Takahashi K, Nonlinear Vibrations of Beams, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 24, University of Tokyo Press, 1976. 3 (印刷中)