

長崎大学工学部 正 員 高橋 初雄

長崎大学工学部 学生員 河原 有勝

1. 緒言 著者らは、はりおよび薄板の非線形振動を多自由度系として取り扱う多自由度系解析法を用いて調和バランス法により非線形性の大きな領域を含む主共振、分岐調波・内部共振およびこれらに及ぼす減衰の影響と解明した。非線形振動においては、固有振動数や振幅によって変わり、同期共振の作用する場合の解は一義的に定まらないうえに複数個算出されるが、そのいずれもが安定とは限らず、各種の不安定現象が可能である。本研究の多自由度系解析法によれば、無限小安定性は確かめるための第1変分方程式は高調波を含む連立のマシューの方程式（連立のヒルの方程式）に帰着する。連立のヒルの方程式の安定判別の簡便かつ数値解析の容易な手法は見受けられないうえである。そこで、本論文では、これらの微分方程式の解と周期性を保証するフーリエ級数の項と、収束・発散と表現する未定定数を含む指数関数の積の形に仮定のうえ、各調波成分の係数比較と行なう調和バランス法を用いて得られる2次の入行列の固有値問題に変換する手法と提案するものである。2次の入行列の固有値問題は2倍サイズの行列の固有値に帰着され、得られる非対称行列の固有値は一般に複素数となるが、QR法を用いてすべての固有値、固有ベクトルを算定することができる。このような固有値の性質を調べることにより、直接解の安定性を明らかにすることが可能である。すなわち、固有値の実数部から減衰定数と引いた値が総てゼロ、もしくは負ならば安定で、一つでも正ならば不安定と、リアプノフの方法によって判別するものである。本論ではまず一般的な解法の展開ののち、既述の安定判別の確立してある減衰・非減衰のマシューの方程式を対象に本法の精度・収束と検討するとともに、次いで、調和バランス法を用いて多自由度系としての応答計算が進めつつあるはりおよび薄板を対象に安定判別を行ない、解の安定限界を定めるものである。

2. 解法 はりおよび薄板の有限変形の非線形運動方程式の解と幾何学的境界条件を満足する座標関数と、未知の時間関数の積の重ね合わせの形に仮定のうえ、ガラーキン法を適用すれば、時間に関する非線形連立常微分方程式が次のように求められる²⁾。

$$\ddot{T}_n + 2\alpha_n \dot{T}_n + \omega_n^2 T_n + \sum_{i,j} \sum_{k,l} A_{ijkl} T_i T_j T_k T_l = \beta_n \bar{p} \cos \omega Z \quad (1)$$

(1)式の周期解と、次のようにフーリエ級数の形に仮定する。

$$T_n = \sum_{i,j} (a_{n,ij}^* \cos i\omega Z + b_{n,ij}^* \sin i\omega Z) \quad (2)$$

(2)式を(1)式に代入して、調和バランス法を適用すれば、 $a_{n,ij}^*$, $b_{n,ij}^*$ を求めるための連立非線形代数方程式が得られ、適当な初期値のもとに、Newton-Raphson法を用いて解くことができる。(1)式の周期解 T_n に微小かく乱 δn を与え、これによって生ずる運動を $\bar{T}_n = T_n + \delta n$ とすると、初期条件が僅かに異なるけれども、ともに(1)式を満足しなればならぬ。 δn は微小量であるから、2次以上の項を無視することとができる。したがって

$$I\delta + 2H\dot{\delta} + A\delta + \sum_{i,j} (B_{ij} \cos 2i\omega Z + C_{ij} \sin 2i\omega Z)\delta = 0 \quad (3)$$

いま、(3)式の解を次のようにフーリエ級数と未定定数を含む指数関数の積の形に仮定する。

$$\delta = e^{(\lambda - i\omega)Z} \left\{ \frac{1}{2} b_0 + \sum_{i,j} (d_{ij} \sin 2i\omega Z + e_{ij} \cos 2i\omega Z) \right\} \quad (4)$$

上式を(3)式に代入して調和バランス法を適用すれば、未定定数 b_0 , d_{ij} , e_{ij} を求めるための同次方程式が次のように求められる。 $G \cdot X = 0$ (G : 係数マトリクス, X : 係数ベクトル) (5)

上式の X の列ベクトルが0ベクトル以外の解をもつためには、係数行列の値がゼロでなければならぬことから次のような2次の入行列の固有値問題に変換される。

$$\det(G) = \det(M_0 - \lambda M_1 - \lambda^2 M_2) = 0 \quad (6)$$

(6)式は倍サイズの固有値問題に変換される。³⁾

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ M_1^{-1} M_0 & -M_1^{-1} M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad \text{すなわち、} Y = \lambda X \quad (7)$$

上式の非対称行列の固有値をR法を用いて求め、実数部から減衰定数を差し引いた値の正負を調べることによって安定性と検討することができる。

3. 適用例 a) 1自由度のマシーンの方程式
減衰を考慮したマシーンの方程式は次のように与えられる。

$$\ddot{S} + 2\beta\dot{S} + (\alpha + \varepsilon \cos \omega t)S = 0 \quad (\beta = R/\sqrt{M}) \quad (8)$$

(8)式の解を(4)式を用いて次のように表わされる。

$$S = e^{(\lambda - \beta)t} \left\{ \frac{1}{2}b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t) \right\} \quad (9)$$

(9)式を(8)式に代入して調和バランス法を適用すれば、次の同次方程式が得られる。

$$\frac{1}{2}(\lambda^2 + \alpha - \beta^2)b_0 + \frac{1}{2}\varepsilon b_1 = 0$$

$$(\lambda^2 + \alpha - n^2\beta^2)b_n + 2\varepsilon n a_{n-1} + \frac{1}{2}(b_{n+1} + b_{n-1}) = 0 \quad (10)$$

$$(\lambda^2 + \alpha - n^2\beta^2)a_n - 2\varepsilon n b_n + \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_{n-1}) = 0$$

いま、 b_0, b_1, a_1 の3項まで採用すれば、(10)式は次のように表わされる。

$$(A) \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\varepsilon}{2} & 1-\alpha & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{x\} = \{b_0, b_1, a_1\}^T, \{y\} = \lambda \{b_0, b_1, a_1\}^T$$

(11)式の固有値 λ を求め、その実数部から β を引いた値の正負により安定判別を行なう。非減衰、減衰の各場合に於いて、採用したフーリエ級数の項数に伴う安定、不安定境界線の変動を示したのが図I-(a), (b)である。非減衰の場合(図I-(a))に於いては、フーリエ級数の3項近似(b_1, a_1)と5項近似(b_0, b_1, a_1, a_2)との間には、 α が大きくなると若干差が生ずるが、7項以上とすると5項との差は殆どなく、ほぼ5項で収束したものと考えられる。

次に厳密解(安定、不安定境界線が 2π 及び 4π の周期をもち

条件から求めた解)と比較すると、 α が0.5付近までは十分合致するが、 α が大きくなると本法は第1不安定領域をきつめに、第2不安定領域を少なめに評価している。しかしながら、通常用いられている直線近似(1次近似)の場合よりも精度の良い解となっていることがわかる。非線形振動の安定判別に用いるのは、第1不安定領域 $\omega = 0.5$ 付近まで、本法は実用上使用差に支えられないものと思われる。次に減衰がある場合(図I-(b))に於いては、3項近似のみを示しているが、非減衰の場合と同程度の解が得られると考えられる。すなわち、減衰は第2不安定領域に大きな影響を与えることがわかる。本法は減衰がある場合にも適用できるものと予想される。

b) 単純ばりの非線形振動 両端ヒンジばりに於いて、系を1自由度2項近似と仮定し、非減衰振動の応答曲線を算定したのが図IIである。すなわち、振幅の定義としては、基本波 $\cos \omega t$ が最大となる時刻のばりの中央点のたわみと回転半径 r とを、無次元変位 AMP を用いた。図中の実線は外力と同位相の振幅に、点線は外力と

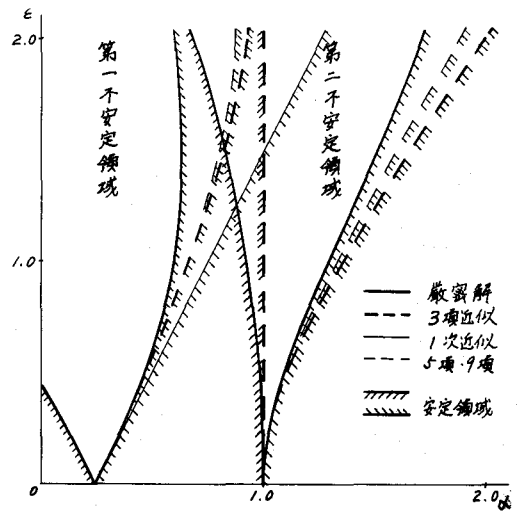


図 I - (a)

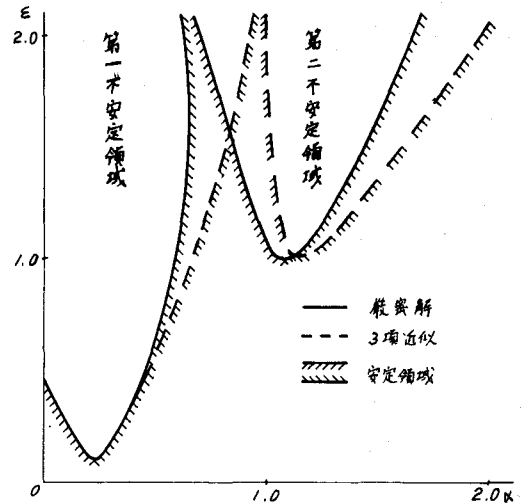


図 I - (b)

逆位相の振幅に対応するものである。また、応答曲線上に○印を付した振幅は安定、×印を付した振幅は不安定となることを示したものであり、 $\bar{\omega}=1.0$ 付近に生ずる振動は共振振と示し、 $\bar{\omega}=0.3$ 付近に生ずる共振振は3倍の高調波共振を示すものである。主共振の逆位相の振幅が鉛直接線をもつ点($\bar{p}=70.0$ 、 $\bar{\omega}=1.42$ 、 $\bar{p}=30.0$ 、 $\bar{\omega}=1.29$)で振幅は安定から不安定に移ることをわかり、 $\bar{\omega}=0.3$ 付近では同位相の振幅が同じ鉛直接線をもつ点で安定から不安定に移っていくことがわかる。

なお、図中において更に振幅が増大すると、不安定から安定に再び移るのは本法の誤差に起因するものである。この高調波共振の安定判別は1自由度3項近似の振幅を用いて求めたものであり、2項近似ではすべて安定となつたが、これは振幅成分をもとに算定される変分方程式が非線形方程式の変分方程式と正確に表わすことを要求するものということを意味するものである。

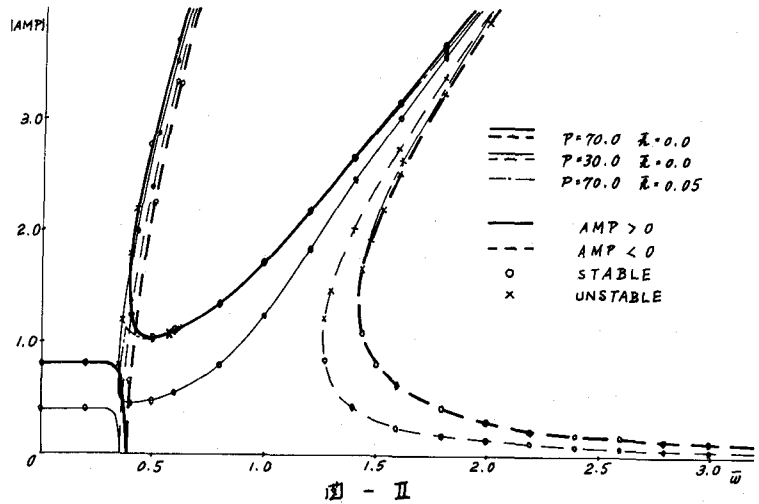


図 - II

その他の領域ではすべて安定な振幅となっており、本法が非減衰の1自由度系の安定限界の算定に使用できるものと考えられる。また、本法が減衰振動の安定判別に適用するため、減衰定数 $\delta=0.05$ に対する応答曲線および安定判別の結果を図一五に付記する。なお、減衰が存在する場合に位相遅れが存在するから瞬時の最大値と振幅比と定義した。共振点と離れて減衰の影響は小さいが、共振点の振幅は有限となり、応答曲線は閉じな形となる。振動数比が1より小さい領域から徐々に振動数を上げていくと振幅は鉛直接線の点から小さい振幅の方に転移することを予想される。従つて、鉛直接線の点で安定から不安定に移るようになる。現在のところ、減衰定数が大きい時には十分な精度でこの点の安定判別を行なうが、それが小さいときは、2項近似では精度が不足することが確認されている。

次に、2自由度1項近似の両端くじばりの非線形2次固有振動数近傍の結果を図一五に示す。図から明らかなように正の振幅が鉛直接線をもつ位置で安定から不安定の振幅に移ることがわかり、本法が多自由度系の安定判別にも応用できることがわかる。

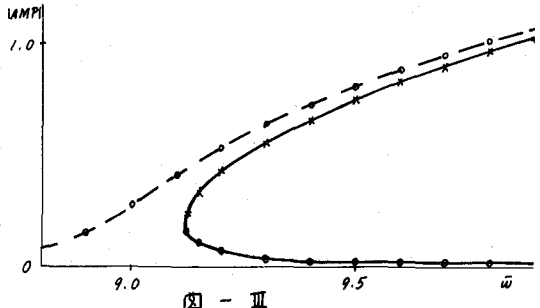


図 - III

4. 結 論 本研究は高調波を含む多自由度系非線形振動の安定判別法と提案することにより、2-3の算例によって、本法が振動の安定判別に適用できることを明らかにしたものである。分数調波共振、内部共振について2項近似時に発表の予定である。最後に、本研究を行なうにあたり、適切な御助言を頂いた京都産業大学理学部戸川教授に記して深く感謝する次第である。

参考文献 1) J.ラサール、J.レフシェッツ著 山本校訳；リヤプノフの方法による安定性理論 産業図書 昭和50年4月 2) 高橋、山辺；連続体の非線形振動解析に用いる多自由度系解析法の収束について 昭和50年度土木学会西部研究発表会講演集 昭和51年2月 3) 平野、戸川、藤井、三好；計算技術および数値計算法(コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-1-A) 培風館 昭和46年6月 4) 榎木；非線形振動論 共立出版 昭和33年