

九州大学 正員 彦坂 照
 “ 学生員 江村 康博
 “ “ “ 綿島 弘之

まえがき

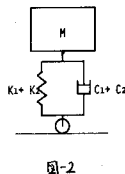
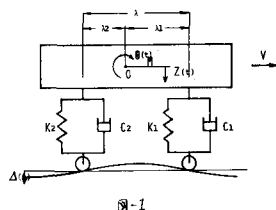
走行荷重による橋梁の動的応答に関しては、衝撃係数を定量的に求めるため、古くから多くの理論的実験的研究がなされているが、従来の研究のほとんどが路面は完全に滑らかと仮定し、たゞ荷重及び構造物の動的特性とともに確定量をみなし、種々な走行条件に対して動的応答をシミュレーションしてきた。しかし、実際に道路橋に及ぼす荷重は非再現性を有する不規則外力と考えられ、動的応答を確率過程として解析することが必要であらう。

道路橋の走行荷重応答解析に不規則振動論を応用したものとて、山田・小堀¹⁾及びL.Fryba²⁾の2つの先駆的研究が見られるが、前者は荷重列の載荷位置を固定して速度の影響は考慮されず、また後者は荷重を白色雑音と仮定し、路面の凹凸や車両の周波数特性は考慮されていない。本論文では、路面の凹凸のパワースペクトルと車両の周波数特性とともに考慮した解析モデルにより橋梁の動的応答を非定常確率過程として解析した。

荷重モデル及び接地力の自己相関々数

自動車を図-1のように2自由度振動系にモデル化し、期待値零の路面にと一定速度 V で走行している時、重心 O の鉛直変位 Z と回転変位 θ に関する運動方程式は次のように表される。

$$\begin{cases} M\ddot{Z} + k_1(Z - \lambda_1\theta) + k_2(Z + \lambda_2\theta) + C_1(\dot{Z} - \lambda_1\dot{\theta}) + C_2(\dot{Z} + \lambda_2\dot{\theta}) \\ = k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2 + C_1\dot{\Delta}_1 + C_2\dot{\Delta}_2 \quad \text{--- (I-a)} \\ M\lambda^2\ddot{\theta} - \lambda_1k_1(Z - \lambda_1\theta) + \lambda_2k_2(Z + \lambda_2\theta) - \lambda_1C_1(\dot{Z} - \lambda_1\dot{\theta}) + \lambda_2C_2(\dot{Z} + \lambda_2\dot{\theta}) \\ = -\lambda_1k_1\Delta_1 + \lambda_2k_2\Delta_2 - \lambda_1C_1\dot{\Delta}_1 + \lambda_2C_2\dot{\Delta}_2 \quad \text{--- (I-b)} \end{cases}$$



ここで、 Δ_1, Δ_2 は各々前輪及び後輪位置での路面凹凸である。また時刻 t において Δ_1 と Δ_2 の間には $\Delta_2(t) = \Delta_1(t - \lambda/V)$ なる関係が成り立つので、 Δ_2 で代表した Δ と θ の周波数応答関数 $H_Z(i\omega), H_\theta(i\omega)$ が求まる。簡単のため θ を無視し、橋梁の動的応答に大きい影響を及ぼすと考えられる $H_Z(i\omega)$ のみを求めると次式で表される。

$$|H_Z(i\omega)|^2 = \frac{\omega_0^4 + 4(k_1\lambda_1^2 + k_2\lambda_2^2)\omega^2 + 4\omega_0\omega_1(k_2\lambda_1 - k_1\lambda_2)\omega \sin \omega_0\tau_0 + 2\omega_0\omega_2(\omega_1\omega_2 + 4k_1k_2\omega^2) \cos \omega_0\tau_0}{\{(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \omega^2\}^2 + \{2(k_1\omega_1 + k_2\omega_2)\omega\}^2} \quad \text{--- (2)}$$

上式において車軸間隔 $\lambda = 0$ とすれば、 $\tau_0 = \lambda/V = 0$ となり図-2の1自由度の周波数応答関数が得られる。

$$|H_Z(i\omega)|^2 = \frac{\omega_0^4 + (2k_0\omega_0\omega)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2k_0\omega_0\omega)^2} \quad \text{ここに } \omega_1 = \sqrt{k_1/M} \quad \omega_2 = \sqrt{k_2/M} \quad \omega_0 = \sqrt{(k_1 + k_2)/M} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

$$k_1 = C_1^2/2\sqrt{k_1M} \quad k_2 = C_2^2/2\sqrt{k_2M} \quad k_0 = (C_1 + C_2)/2\sqrt{(k_1 + k_2)M} = (k_1\omega_1 + k_2\omega_2)/\omega_0$$

ところで、路面凹凸のスペクトルは、従来測定結果からおおむね次式で表されることが知られている。

$$S_\Delta(\omega) = a/\Omega^2 \quad \text{ここに、}\Omega \text{は路面周波数(路面単位長さ当りの凹凸波数)、} a \text{は路面の良否により異なる定数} \quad \text{--- (3)}$$

また、速度 V で走行する自動車の入力スペクトルは、 $\omega = 2\pi V\Omega$ なる関係があるので次式で与えられる。

$$S_\Delta(\omega) = 4\pi^2 V a / \omega^2 \quad \text{--- (4)}$$

上記の Z の周波数応答関数と路面凹凸のパワースペクトルより、鉛直変位の加速度 $\ddot{Z}$ のパワースペクトルが求まる。

$$S_{\ddot{Z}}(\omega) = \omega^4 |H_Z(i\omega)|^2 S_\Delta(\omega) \quad \text{--- (5)}$$

Sprung Massの接地圧は $P(t) = P_0(1 - \ddot{z}/g)$ と表われ、またWiener-Khinchineの関係より接地圧 $P(t)$ の自己相関々数 $R_P(t_1, t_2)$ は次式にて表わされる。

$$R_P(t_1, t_2) = (P_0^2/g^2) \int_{-\infty}^{\infty} S_{\ddot{Z}}(\omega) e^{i\omega(t_1 - t_2)} d\omega \quad \text{--- (6)}$$

橋梁の動的応答解析

荷重 $P(t)$ が橋梁上を速度 V で走行する時、橋梁の n 次の振動モードを $S_n(x)$ 、固有円振動数を ω_n 、減衰定数を k_n

一般座標と $\phi_n(t)$ とすれば Modal Analysis により $\phi_n(t)$ に関する次の微分方程式が得られる。

$$\ddot{\phi}_n(t) + 2\lambda_n \omega_n \dot{\phi}_n(t) + \omega_n^2 \phi_n(t) = S_n(vx) P(x) / M_n \quad \text{ここに} \quad M_n = \int_0^L \rho S_n^2(x) dx \quad \rho: \text{単位長さ当りの質量}$$

但し、 $P(x)$ には橋梁のたわみの影響は考慮されていない。初期条件 $\dot{\phi}_n(0) = \phi_n(0) = 0$ を満足する解は次式で与えられる。

$$\phi_n(t) = \frac{1}{M_n} \int_0^t A(x-\tau) S_n(v\tau) P(\tau) d\tau \quad \text{ここに} \quad A(x) = e^{-\lambda_n \omega_n x} \sin \omega_n' x / \omega_n' \quad \omega_n' = \omega_n \sqrt{1 - \lambda_n^2} \quad \text{--- (7)}$$

$\phi_n(t)$ の期待値は $\bar{\phi}_n(t) = \frac{1}{M_n} \int_0^t A(x-\tau) S_n(v\tau) P_0 d\tau$ であるから、 $\phi_n(t)$ の自己相関関数は次式で表わされる。

$$R\phi_n(x_1, x_2) = E\{[\phi_n(x_1) - \bar{\phi}_n(x_1)][\phi_n(x_2) - \bar{\phi}_n(x_2)]\} = \left(\frac{1}{M_n}\right)^2 \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} A(x_1-\tau_1) A(x_2-\tau_2) S_n(v\tau_1) S_n(v\tau_2) R_P(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$= \left(\frac{P_0}{M_n g}\right)^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\tilde{z}}(\omega) I_n(\omega, x_1) I_n^*(\omega, x_2) d\omega \quad \text{--- (8)}$$

ここに、 $I_n(\omega, x_1) = \int_0^{x_1} A(x_1-\tau_1) e^{i\omega\tau_1} S_n(v\tau_1) d\tau_1$ 、 $I_n^*(\omega, x_2) = \int_0^{x_2} A(x_2-\tau_2) e^{-i\omega\tau_2} S_n(v\tau_2) d\tau_2$

動的たわみ $y(x, t)$ は $y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x) \phi_n(t)$ で与えられるので、動的たわみ $y(x, t)$ の自乗平均値 $\sigma_y^2(x, t)$ は、

$$\sigma_y^2(x, t) = E\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} S_m(x) S_n(x) [\phi_m(t) - \bar{\phi}_m(t)][\phi_n(t) - \bar{\phi}_n(t)]\right\}$$

周知のように、単純桁橋では $m \neq n$ の項は $m = n$ の項に比し

て極めて小さいので上式の2乗の項のみとれば

$$\sigma_y^2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^2(x) R\phi_n(t, t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[S_n^2(x) \left(\frac{P_0}{M_n g}\right)^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\tilde{z}}(\omega) |I_n(\omega, x)|^2 d\omega \right] \quad \text{--- (9)}$$

数値計算例

単純合成桁橋及びランガー橋を対象として、上記理論による数値計算を行なった。路面のパワースペクトル密度は、ここでは、

$q = 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{m}$ と手えている。以下において、単純桁橋はスパン

中点 $x = l/2$ の応答に注目しており、上式において級数の第1項のみを、ランガー橋では $x = l/4$ 点の応答を級数の第3項で取って自乗平均値 $\sigma_y^2(x, t)$ と求めた。結果はすべて標準偏差 $\sigma_y(x, t)$ を静的最大たわみ y_{st} で割った無次元量で表わしている。

図-3、図-4は単純桁橋において、1軸(図-2)荷重モデルと走行させた場合の結果であり、前者は自動車と橋梁の固有振動数比 f/f_n とパラメータとした場合の非定常たわみ応答の標準偏差を示したものである。これによると $f/f_n = 1$ の近傍に極めて大きな影響を及ぼし、 $f/f_n = 1$ の近傍をピークとしていることがわかる。

又、後者は荷重がスパン中点を通過する時刻における標準偏差の走行速度による変化を示したものであり、 $V = 5 \text{ m/sec}$ の近傍をピークとして、その他では単調に減少している。図-5は同様に2軸(図-1)荷重モデルを対象としたもので、車軸間隔が考慮されているため、パラメータのわずかな変化により応答が複雑に変化している。図-6はランガー橋(子飼橋)に1軸荷重モデルと走行させた場合の固有周期による応答変化を示したもので、非対称1次モードが非常に影響していることがわかる。

(参考文献)

- 1) 山田善一、小堀為雄；活荷重に対する道路橋の動的応答
工学会論文集 No. 148号 1967年12月
- 2) L. Fryba; Non-Stationary Vibrations of Bridges under Random Moving Load, Final Report of 8th IABSE Congress, New York 1968

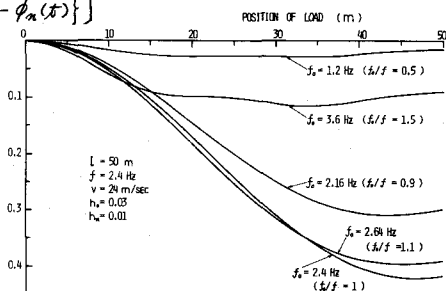


図-3

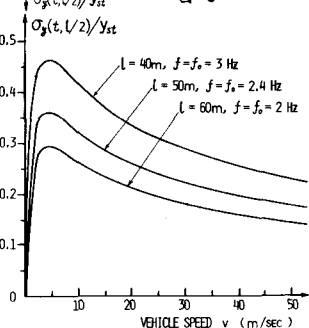


図-4

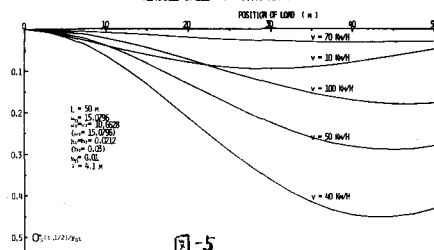


図-5

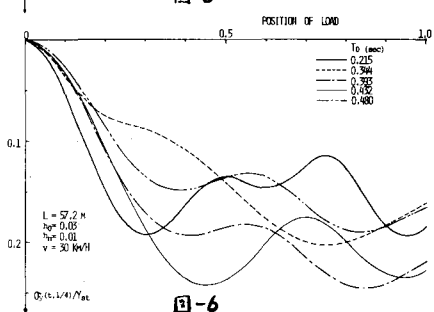


図-6