

長崎大学工学部 正員 高橋和雄

日本道路公団 正員 室井智文

長崎大学工学部 学生員 田代幸英

1. 緒言 周知のように吊橋は他の橋梁形式に比較して剛性が低く、風や地震、移動荷重などの動的外力による振動に起因する諸現象が問題となることが多い。これまでの吊橋の固有振動性状の解析にあたっては鉛直たわみ、ねじれ、横たわみの各固有振動を別個に取り扱ってきたが、¹⁾ 風のように水平、鉛直および回転の各成分を有する外力が作用する場合や列車荷重のような大きな偏心荷重が作用する場合には各成分の連成振動が現れ、振幅が理想的な微小振動でない限り、分離できないものと考えられる。著者らは先に変分原理を用いてキャンバーによる曲率を含む連成を考慮した吊橋の基礎方程式を誘導するとともに、^{2), 3)} 3成分を考慮した風荷重を受ける吊橋の静的曲げの変形と応力について報告した。引続いて、本論は吊橋の動的な諸問題を解析するための連成を考慮した吊橋の運動方程式および非連成法との関係の考察を試みたものである。

2. 吊橋における基本的仮定 第1報で用いた仮定の他に次の諸事項を追加する。

(1) ハンガーの慣性力を無視する。

(2) 補剛桁およびケーブルの橋軸方向の並進運動は生じない。

3. 吊橋の変形によるエネルギーの算定 (1) 補剛桁 図-1に示すような座標系を取れば、断面剛の仮定から、はり内の任意点の変位関数は次のように表わされる。

$$\square = u(x) + \eta \theta_s(x) \quad (1) \quad V = v(x) + (\xi - e) \theta_s(x) \quad (2)$$

$$W = -\xi u'(x) + \eta v'(x) + \theta_s'(x) \{ \varphi(\xi, \eta) + e \eta \} \quad (3)$$

ここに、 $\square$, V , W ; 図心 G を原点にした点の任意点の変位、 u , v ; セン断中心の横たわみ、 θ_s ; セン断中心まわりの回転角、 θ_s' ; ねじれ率、 φ ; 標準化された St Venant のゆがみ関数、 e ; セン断中心と重心間の距離、 $\prime$ は x に関する微分を示す。

式(1)~(3)を用いて、テンソル解析によりキャンバーによる曲率 χ_i をもつ補剛桁のひずみが次のよう仮定される。

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0, \quad \varepsilon_z = -\chi_1 u + \eta(-v' + \chi_1 \theta_s) - \xi u'' + \theta_s' \varphi$$

$$\gamma_{xz} = -\eta(\theta_s' + \chi_1 v') + (\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \chi_1 \varphi) \theta_s', \quad \gamma_{yz} = \xi(\theta_s' + \chi_1 v') + (\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - e) \theta_s' \quad (4)$$

補剛桁のひずみエネルギーは Hooke の法則を用いて次式で表わされる。

$$U_k = \frac{1}{2} \iiint [\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}] d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} = \frac{1}{2} \iiint [E \varepsilon_z^2 + G(\gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)] d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} \quad (5)$$

運動エネルギーは式(1)~(3)の変位関数を用いて次式で表わされる。

$$T_k = \frac{1}{2} \iiint \frac{W_k}{g A_k} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} \quad (6)$$

(2) ケーブル ケーブルは水平、鉛直変形を生ずるが、初期たわみ u_i をもつ場合のひずみは前報から

$$\varepsilon_s = (\chi_i' \bar{u} + \frac{1}{2} \bar{u}^2 + \frac{1}{2} \bar{v}^2) / (1 + \chi_i^2) \quad (7) \quad \text{ここに、} \bar{u}, \bar{v}; \text{ ケーブルの横たわみ}$$

ケーブルのひずみエネルギーは初期応力と付加応力による仕事を考慮すれば、次のように与えられる。

$$U_{ci} = \iiint \bar{\sigma}_{ci} \varepsilon_{ci} d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} + \frac{1}{2} \iiint \sigma_{ci} \varepsilon_{ci} d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} = H_{ci} \int_0^l (\chi_i' \bar{u}_i + \frac{1}{2} \bar{u}_i^2 + \frac{1}{2} \bar{v}_i^2) dz + \frac{H_{ci}}{2} \int_0^l (\chi_i' \bar{u}_i + \frac{1}{2} \bar{u}_i^2 + \frac{1}{2} \bar{v}_i^2) dz \quad (8)$$

ここに、 H_{ci} ; ケーブル i 本あたりの死荷重水平張力、 H_{ci} ; ケーブル i の活荷重水平張力、 $i = 1, 2$

ケーブルの運動エネルギーは $T_{ci} = \frac{1}{2} \iiint \frac{W_{ci}}{2g A_{ci}} (\dot{\bar{u}}_i^2 + \dot{\bar{v}}_i^2) d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} \quad (9)$

本法では吊材は伸びないと仮定したので ケーブルの鉛直変位は桁の変位を用いて表わすことができる。

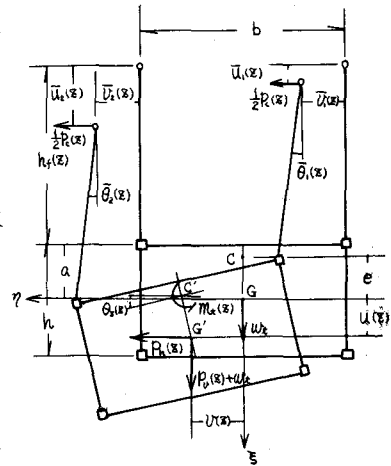


図-1

$$\bar{u}_1 = u - \frac{1}{2} b \theta_2, \quad \bar{u}_2 = u + \frac{1}{2} b \theta_2$$

の吊材 吊材は伸びない仮定したが、吊材の力の水平成分がケーブルと補剛桁との相対変位との間に仕事をすることになる。吊材の張力を直接求めることは困難であるから、既知の力を用いて表わすことにする。すなわち、補剛桁の鉛直方向力 $\frac{1}{2}(P_0 + W_k - \frac{W_k}{g} \ddot{u})$ による水平成分 Y_2 は次式で与えられる。

$$Y_2 = \frac{1}{2}(P_0 + W_k - \frac{W_k}{g} \ddot{u}) \tan \theta_2 = \frac{1}{2}(P_0 + W_k - \frac{W_k}{g} \ddot{u}) \theta_2 \quad (11)$$

上式の θ_2 は吊材の傾斜角で、補剛桁とケーブルの変位の適合条件 $h_2 \theta_2 = v - \bar{u}_2 + (a - e) \theta_3$ (12) を満足する。

$$\text{よって吊材の傾斜によるエネルギーは} \quad V_h = \frac{1}{2} \int_0^L \{ Y_1 (v - \bar{u}_1 + (a - e) \theta_3) + Y_2 (v - \bar{u}_2 + (a - e) \theta_3) \} dz \quad (13)$$

4) 外力のなす仕事 図-1を参照すれば次のように与えられる。

$$W_e = \int_0^L \{ (P_0 + W_k + W_k) u + P_0 v + (m_k - P_0 e) \theta_3 + \frac{P_0}{2} (\bar{u}_1 + \bar{u}_2) \} dz \quad (14)$$

4. 基礎方程式 式(6), (8), (9), (13)および(14)を用いて、Hamiltonの原理は次のように表わされる。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (15) \quad \text{ここに} \quad L = T_k + T_{c1} + T_{c2} - V_k - V_{c1} - V_{c2} - V_h + W_e$$

これより、 δu , δv , $\delta \theta_3$, $\delta \bar{u}_1$ および $\delta \bar{u}_2$ の任意性から次の5つの運動方程式がえられる。

$$EI_2 u^{(4)} + EA_2 X^2 u'' - (2H_0 + H_{p1} + H_{p2}) u'' + (H_{p1} - H_{p2}) \frac{b}{2} \theta_3'' + \frac{1}{g} (W_k + W_k) \ddot{u} = P_0 - (H_{p1} + H_{p2}) \frac{g}{2} + \frac{W_k}{g A_2} I_2 \ddot{u} \quad (16)$$

$$EI_2 v^{(4)} + GI_p X^2 v'' - GI_p X X' v' - EI_2 X' \theta_3'' - 2EI_2 X' \theta_3' - (EI_2 + GJ) X \theta_3'' + \frac{W_k}{g} (\bar{u} - e \bar{\theta}_3) + \frac{1}{2} (P_0 + W_k (1 - \frac{\ddot{u}}{g})) (\theta_1 + \theta_2) = P_0 + \frac{W_k}{g A_2} I_2 \ddot{v} \quad (17)$$

$$EI_2 \theta_3^{(4)} - (GJ + GI_p X^2 - e^2 G A_0 + \frac{P_0}{2} (2H_0 + H_{p1} + H_{p2})) \theta_3'' + EI_2 X' \theta_3' - (EI_2 + GJ) X \theta_3'' - GI_p X' v' + \frac{1}{g} (W_k r_2^2 + W_k b^2) \ddot{\theta}_3 - \frac{W_k}{g} e \ddot{v} + (H_{p1} - H_{p2}) \frac{b}{2} u'' + \frac{1}{2} (a - e) (P_0 + W_k (1 - \frac{\ddot{u}}{g})) (\theta_1 + \theta_2) = m_k - P_0 e + \frac{b}{2} (H_{p1} - H_{p2}) \frac{g}{2} + \frac{W_k}{g A_2} I_2 \ddot{\theta}_3 \quad (18)$$

$$(H_0 + H_{p1}) \bar{u}_1'' + \frac{1}{2} (P_0 + W_k (1 - \frac{\ddot{u}}{g})) \theta_1 - \frac{W_k}{2g} \bar{u}_1 = -\frac{P_0}{2} \quad (19) \quad (H_0 + H_{p2}) \bar{u}_2'' + \frac{1}{2} (P_0 + W_k (1 - \frac{\ddot{u}}{g})) \theta_2 - \frac{W_k}{2g} \bar{u}_2 = -\frac{P_0}{2} \quad (20)$$

式(16)~(20)の他に式(12)の条件および活荷重張力を決定するためのケーブル方程式が加わる。

$$H_{pi} = E_c A_c / L_c [\sum \int_{c_i}^{c_{i+1}} \bar{u}_i dz_i + d + L_T T] \quad (21) \quad \text{ここに} \quad L_c = \int_c^{c'} \sec^2 \varphi_i dz_i, \quad L_T = \int_c^{c'} \sec^2 \varphi_i dz_i, \quad \varphi_i; \text{ケーブル} i \text{ の傾斜角}$$

5. 考察 図-2のブロックダイアグラムに示すように一

般的な運動方程式(I)を種々の仮定を用いて簡略することができる。通常吊橋の曲率 X_1 は十分小さいので $X_1 = \text{const.}$ および X_1 の2次の項の無視、低次振動に対象を限定すれば回転慣性無視の仮定が成立する。また吊橋の断面が左右対称でかつケーブルに作用する水平力が等しい場合には左右のケーブルの水平変位および傾斜角は等しくおくことができる。このような簡略化ののち得られた解析の対象となる運動方程式(II)は変形に依存する活荷重張力 H_{p1} , H_{p2} が係数項に含まれるために非線形となっているが、たわみおよびねじれが大きくないときは線形化が可能である。線形化方程式(III)では鉛直方向の運動方程式(IV)は独立に取り扱うことができ、文献(1)の式と合致する。次に吊橋の横方向およびねじれ変形については2軸対称断面の場合(V)、曲率 X_1 が0の場合(VI)もしくはその両者が成立する場合(VII)のいずれの場合も各変形を分離することは不可能である。文献(1)に使用されている横たわみ(III)およびねじれ(X)の運動方程式は、いずれかの

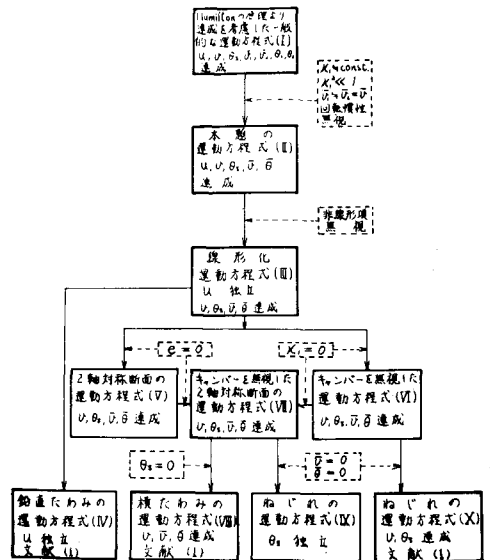


図-2

振動が卓越して、他の変位成分が無視できる場合について成立すべき方程式である。横たわみとねじれとを分離する仮定はかなり無理な仮定であるといえる。数値結果については講演時に発表の予定である。

参考文献 1) 井井数他; 鋼橋(III), 技報堂, 昭和42年。2) 室井, 高橋; 吊橋の基礎方程式に因る考察 昭和44年度土木学会西部支部研究発表会講演集, 昭和50年2月。

3) 高橋; 連成した吊橋の基礎方程式について(第1報、微小変形の場合) 第30回土木学会年次学術講演会講演集 第1部 昭和50年10月。