

長崎大学工学部 正会員 崎山 毅

長崎大学工学部 正会員 栗原和夫

1. まえがき 断面の高さや幅や部材の長さ方向に変化する、いわゆる変断面梁の自由振動については、多くの理論的および実験的研究が行われてきている。変断面梁の長さに対して断面の小さな自由振動、つまり、Bernoulli-Eulerの初等曲げ理論から導かれる振動方程式により、著者らの一人もさきの報告¹⁾において、境界条件のいかにかわかわらず、任意の階段を有する変断面梁の任意次数の固有振動数を算定した。また、斎藤、佐藤ら²⁾の断面急変部を有する片持梁の自由振動と長方形断面について理論的および実験的に研究し、梁の長さに対して急変部が小さく、低次数の範囲では、Bernoulli-Eulerの振動方程式により十分正確に振動形状を解析しようことを明らかにしている。

変断面梁の長さに対して断面が小さくなると、曲げモーメントの他に剪断力の影響を考え、往復運動の他にねじり角による回転性を考慮した梁の振動つまりTimoshenko梁の振動方程式により固有値を算定することが必要となり、くる。一様断面Timoshenko梁の振動については、多くの研究がなされてきている。^{3), 4)} 変断面梁については任意変断面の固有値にみよはる影響は著者の知るかぎりにおいて十分に明らかにされてはいないように思える。

本報はTimoshenko梁の振動方程式により任意の階段を有する変断面梁の固有値を算定し、さきの報告と比較することにより、剪断力および回転性の影響を検討しようとするものである。

2. 基礎微分方程式 直線梁の剪断変形を考慮に入れた基礎微分方程式は次式である。

$$\begin{aligned} \bar{M}(x) &= -EI(x) \frac{d^2 \bar{Q}}{dx^2} & (1-a) \quad \bar{Q}(x) &= \frac{G}{H} A(x) \left(\frac{d\theta}{dx} - \bar{\psi} \right) & (1-b) \\ \frac{d\bar{Q}}{dx} &= -g(x) & (1-c) \quad \frac{d\bar{M}}{dx} &= \bar{Q}(x) + m(x) & (1-d) \end{aligned}$$

に於て $g(x)$, $m(x)$, $\bar{M}(x)$, $\bar{Q}(x)$, $\bar{\psi}$, $EI(x)$, $A(x)$, G , H はそれぞれ 断面強度, モーメント断面強度, 曲げモーメント, 剪断力, 曲げモーメントによるねじり角, 曲げ剛性, 断面積, 梁の横弾性係数, 梁の剪断変形係数である。

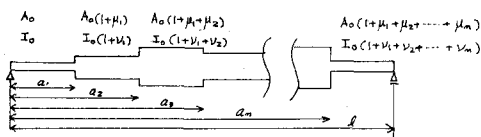


図-1. Stepped beam

I_0 : 階段状変断面梁の左端-機部分の断面2次モーメント

A_0 : " " " " 断面積

μ_i : 左から第 i 段目の断面急変部にある断面2次モーメントの変化率

μ_i : " " " " 断面積の変化率

m : 断面急変部の位置

3. 自由振動方程式 図-1の梁の単位体積当りの質量を ρ_0 とすると、単位長さ当りの質量 $\rho_0 A(x)$ は単位階段函数 $u(x-a_i)$ を用いて $\rho_0 A(x) = \rho_0 A_0 \sum_{i=0}^n \mu_i u(x-a_i)$ と表わされる。また、梁の断面2次モーメントも同様に

$I(x) = I_0 \sum_{i=0}^n \nu_i u(x-a_i)$ と表わされる。(以下で自由振動中の階段状変断面梁の単位長さ当りの慣性力 $g(x)$,

および回転慣性力 $m(x)$ は

$$g(x) = -\rho_0 A_0 \sum_{i=0}^n \mu_i u(x-a_i) \frac{\partial^2 \bar{Y}}{\partial x^2}, \quad m(x) = -\rho_0 I_0 \sum_{i=0}^n \nu_i u(x-a_i) \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} \quad \text{と表わされる。}$$

ゆえに、階段状変断面梁の自由振動方程式は、添減性を無視した2次式となる

$$\bar{M}(x) = -EI_0 \sum_{i=0}^n \nu_i u(x-a_i) \frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial x^2} \quad (2-a) \quad \bar{Q}(x) = \frac{G A_0}{H} \sum_{i=0}^n \mu_i u(x-a_i) \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial x} - \bar{\psi} \right) \quad (2-b)$$

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} = \rho_0 A_0 \sum_{i=0}^n \mu_i u(x-a_i) \frac{\partial^2 \bar{Y}}{\partial x^2} \quad (2-c) \quad \frac{\partial \bar{M}}{\partial x} - \bar{Q} = -\rho_0 I_0 \sum_{i=0}^n \nu_i u(x-a_i) \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} \quad (2-d)$$

式(2-a)~(2-d)に次の各式

$$\bar{y}(x,t) = y^*(x)e^{i\omega t}, \quad \bar{M}(x,t) = M^*(x)e^{i\omega t}, \quad \bar{Q}(x,t) = Q^*(x)e^{i\omega t}, \quad \bar{\psi}(x,t) = \psi^*(x)e^{i\omega t} \quad \text{E.L. } \omega: \text{固有円振動数}$$

を代入すれば、Eは、曲げモーメント、剪断力および曲げモーメントによるEは、曲げの基礎函数 $y^*(x)$, $M^*(x)$, $Q^*(x)$ および $\psi^*(x)$ に関する連立方程式をえる。さらに、変数 x を無次元変数 $\eta = x/l$ に置き換え $y(\eta) = \frac{y^*}{l}$, 諸量の断面力 E $M(\eta) = -\frac{EI_0}{l^2} M^*(\eta)$, $Q(\eta) = \frac{EI_0}{l} Q^*(\eta)$ と置けば、無次元化された基礎函数 $y(\eta)$, $M(\eta)$, $Q(\eta)$, $\psi(\eta)$ に関する次式が導かれる。

$$\begin{aligned} M(\eta) &= \sum_{i=0}^n \nu_i u(\eta - \xi_i) \frac{d\psi}{d\eta} \dots (3-a) & Q(\eta) &= \frac{EI_0}{b^2} \sum_{i=0}^n \mu_i u(\eta - \xi_i) \left(\frac{dy}{d\eta} - \psi \right) \dots (3-b) & \text{E.L. } \lambda^4 &= \frac{\rho A_0 \omega^2 l^4}{EI_0} & \xi_i &= \frac{a_i}{l} \\ \frac{dM}{d\eta} + Q &+ \frac{\rho A_0}{EI_0} \sum_{i=0}^n \nu_i u(\eta - \xi_i) \psi = 0 \dots (3-c) & \frac{dQ}{d\eta} &+ \lambda^4 \sum_{i=0}^n \mu_i u(\eta - \xi_i) y = 0 \dots (3-d) & a^2 &= \frac{A_0 l^3}{I_0} & b^2 &= \frac{EI_0}{GJ} \end{aligned}$$

式(3-a)~(3-d)より Laplace 変換を用いた函数 $y(\eta)$, $M(\eta)$, $Q(\eta)$, $\psi(\eta)$ の次式をえる。

$$y(\eta) = \sum_{i=1}^n Y_i M(\eta) + \sum_{i=1}^n Y_i Q(\eta) + \sum_{i=1}^n Y_i \psi(\eta) + \sum_{i=1}^n \left(H Y_i M(\eta_i) + H Y_i Y(\eta_i) + H Y_i Q(\eta_i) + H Y_i \psi(\eta_i) \right) u(\eta - \eta_i) \quad (4-a)$$

$$M(\eta) = \sum_{i=1}^n M_i M(\eta) + \sum_{i=1}^n M_i Q(\eta) + \sum_{i=1}^n M_i \psi(\eta) + \sum_{i=1}^n \left(H M_i M(\eta_i) + H M_i Y(\eta_i) + H M_i Q(\eta_i) + H M_i \psi(\eta_i) \right) u(\eta - \eta_i) \quad (4-b)$$

$$Q(\eta) = \sum_{i=1}^n Q_i M(\eta) + \sum_{i=1}^n Q_i Q(\eta) + \sum_{i=1}^n Q_i \psi(\eta) + \sum_{i=1}^n \left(H Q_i M(\eta_i) + H Q_i Y(\eta_i) + H Q_i Q(\eta_i) + H Q_i \psi(\eta_i) \right) u(\eta - \eta_i) \quad (4-c)$$

$$\psi(\eta) = \sum_{i=1}^n \psi_i M(\eta) + \sum_{i=1}^n \psi_i Q(\eta) + \sum_{i=1}^n \psi_i \psi(\eta) + \sum_{i=1}^n \left(H \psi_i M(\eta_i) + H \psi_i Y(\eta_i) + H \psi_i Q(\eta_i) + H \psi_i \psi(\eta_i) \right) u(\eta - \eta_i) \quad (4-d)$$

式(4-a)~(4-d)と境界条件より変断面梁の振動方程式が求まる。

4. 数値計算および考察

図-2 は自由振動の固有値に対する固軸慣性および剪断力の影響を示している。

これによれば、細長比 a が小さくなるほどそれに伴って、影響が大きくなり、断面変化率 μ_i が大きくなるほど比例して影響も大になる。また1次固有値に比べて2次さらには3次固有値に与える固軸慣性および剪断力の影響は大きくなり1次固有値に対して2次固有値は3~4倍、3次固有値は6~7倍と成り細長比 a および断面変化率 μ_i による固有値に与える影響の多少の差が生じる。つまり細長比の小さい変断面梁の自由振動の固有値に対する固軸慣性および剪断力の影響は高次になるにつれて大になり、さらに断面の変化率 μ_i が増大するにつれて大になる。図-3 は自由振動の固有値を表わしている。これによれば、断面の変化率 μ_i が 0.5 ~ 0.8 のあたりで固有値が低下することがわかる。これは変化する断面部材が大きくなり両部分の剛性に著しい差が生じるためであろうと思われるがこの様な変断面梁の振動モードを求めて、さらに検討する必要がある。式(4-a)~(4-d)より任意個の変断面を有する梁の任意次の固有振動数に対する固軸慣性および剪断力の影響を求めれば算定することが可能である。数値計算は長崎大学 FACOM 270-30 による。

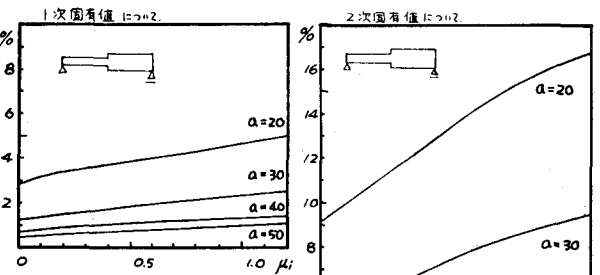


図-2(a)

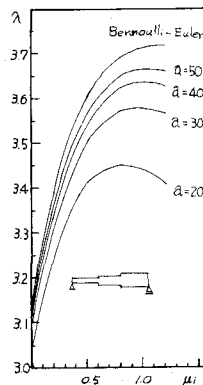
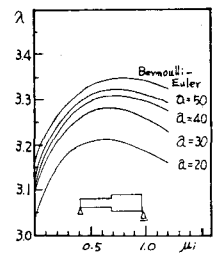


図-3(a)



(b)

参考文献 1) T. SAKIYAMA; An Analysis of Bending Vibrations of Nonuniform Beams, Theoretical and Applied Mechanics Vol. 23 1973.

2) 斎藤, 佐藤; 変断面を有する弾性梁の振動, 日本機械学会論文(71部) 34巻 261号 543.5

3) T.C. HUANG; The Effect of Rotatory Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode

Equations of Uniform Beams with Simple End Conditions, J.A.M., Dec 1961 4) S. 中野; 工業振動学, 学芸図書 1956.5