

九州大学農学部 ⁰橋口公一
同 上 上野正美

I. はじめに

粒状体の微視的変形解析に基づいて Rowe あるいは Horne により簡潔なエネルギー比特性式が提案されている。しかし、これらの特性式に基づくいわゆる応力-歪構成式は明らかにされていない。本文においては、上記の特性式に基づく負荷応力関数と併し、さらに橋口が提案した硬化関数を考慮して粒状体に関する具体的な構成則を導いておく。なお、本文においては、応力および歪の符号は伸張を正とする。

II. Rowe-Horne のエネルギー比特性式に基づく負荷(降伏)応力関数

Rowe が提案した軸対称応力状態におけるエネルギー比特性式は粘着性を考慮した形式で、 $\sigma_i \geq \sigma_j \geq \sigma_k$ ($i, j, k = 1, 2, 3$ とし $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は主応力)として、次のように示される。

軸対称圧縮状態 ($\sigma_i = \sigma_j > \sigma_k, |\sigma_i| = |\sigma_j| > |\sigma_k|$) において

$$\sigma_k d\epsilon_k / \{2(\sigma_i - 2C/\sqrt{K})d\epsilon_i\} = -K \quad (1)$$

軸対称伸張状態 ($\sigma_i > \sigma_j = \sigma_k, |\sigma_i| < |\sigma_j| = |\sigma_k|$) において

$$2\sigma_k d\epsilon_k / \{(\sigma_i - 2C/\sqrt{K})d\epsilon_i\} = -K \quad (2)$$

ここに、 $d\epsilon_i, d\epsilon_j$ および $d\epsilon_k$ はそれぞれ σ_i, σ_j および σ_k 方向の歪増分である。また、 C は粒子間の粘着力であり、 K は粒子間マツ角を ϕ とし $K = \tan^2(\pi/4 + \phi/2)$ で与えられる。

他方、その後、Horne は軸対称状態に局限されない特性式として、式(1)および(2)と類同の諸式を与えているが、これらに粒子間の粘着力を考慮すれば、以下のようなになる。

$d\epsilon_i > 0, d\epsilon_j > 0, d\epsilon_k < 0$ ($\sigma_i, \sigma_j > \sigma_k$) において

$$\sigma_k d\epsilon_k / \{(\sigma_i - 2C/\sqrt{K})d\epsilon_i + (\sigma_j - 2C/\sqrt{K})d\epsilon_j\} = -K \quad (3)$$

$d\epsilon_i > 0, d\epsilon_j < 0, d\epsilon_k < 0$ ($\sigma_i > \sigma_j, \sigma_k$) において

$$(\sigma_j d\epsilon_j + \sigma_k d\epsilon_k) / \{(\sigma_i - 2C/\sqrt{K})d\epsilon_i\} = -K \quad (4)$$

さて、硬化パラメータを H とすれば、塑性条件式は

$$\bar{f}(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k) - F(H) = 0 \quad (5)$$

で与えられる。ここに、 $\bar{f}$ および F はそれぞれ負荷応力関数および硬化関数である。また、式(1)~(4)における歪増分はこれらの諸式の導出過程から塑性歪増分であると解され、式(3)および(4)に Drucker の垂直条件により規定される塑性歪増分成分比を用いると、それぞれ、次の関係が得られる。

$$(\sigma_i - 2C/\sqrt{K})\partial\bar{f}/\partial\sigma_i + (\sigma_j - 2C/\sqrt{K})\partial\bar{f}/\partial\sigma_j + (\sigma_k/K)\partial\bar{f}/\partial\sigma_k = 0 \quad (6)$$

$$(\sigma_i - 2C/\sqrt{K})\partial\bar{f}/\partial\sigma_i + (\sigma_j/K)\partial\bar{f}/\partial\sigma_j + (\sigma_k/K)\partial\bar{f}/\partial\sigma_k = 0 \quad (7)$$

また、式(6)および(7)の二般解はそれぞれ

$$\bar{f} = \bar{f}((\sigma_i - \sigma_k)^K / (-\sigma_i + 2C/\sqrt{K}), (-\sigma_k)^K / (-\sigma_j + 2C/\sqrt{K})) \quad (8)$$

$$\bar{f} = \bar{f}((- \sigma_j)^K / (-\sigma_i + 2C/\sqrt{K}), (-\sigma_k)^K / (-\sigma_i + 2C/\sqrt{K})) \quad (9)$$

で与えられる。これらの最も簡潔な具体関数は

$$\bar{f} = (-\sigma_k)^K / \{-(\sigma_i + \sigma_j)/2 + 2C/\sqrt{K}\} \quad (10)$$

$$\bar{f} = \{-(\sigma_j + \sigma_k)/2\}^K / (-\sigma_i + 2C/\sqrt{K}) \quad (11)$$

であると考えられる。これは応力に関して同次ではないので、主応力空間において負荷面は相似性を維持しない。

以下、 $C=0$ として、 $\bar{f}$ のサイズを等方応力状態において $\bar{f} = -P$ ($P = (\sigma_i + \sigma_j + \sigma_k)/3$) を満たすよう

に選べば、式(10)および(11)より $\bar{f}$ はそれぞれ

$$\bar{f} = [(-\sigma_h)^K / \{(-\sigma_h + \sigma_v)/2\}]^{1/(K-1)} \quad (12)$$

$$\bar{f} = [\{(-\sigma_h + \sigma_v)/2\}^K / (-\sigma_h)]^{1/(K-1)} \quad (13)$$

となり、これは応力に関する同次関数であるので、主応力空間において負荷面は相似性を維持する。また、中間主応力 σ_j を陽に考慮しないことにすれば、式(12)および(13)における $\bar{f}$ はいずれも、次のようになる。

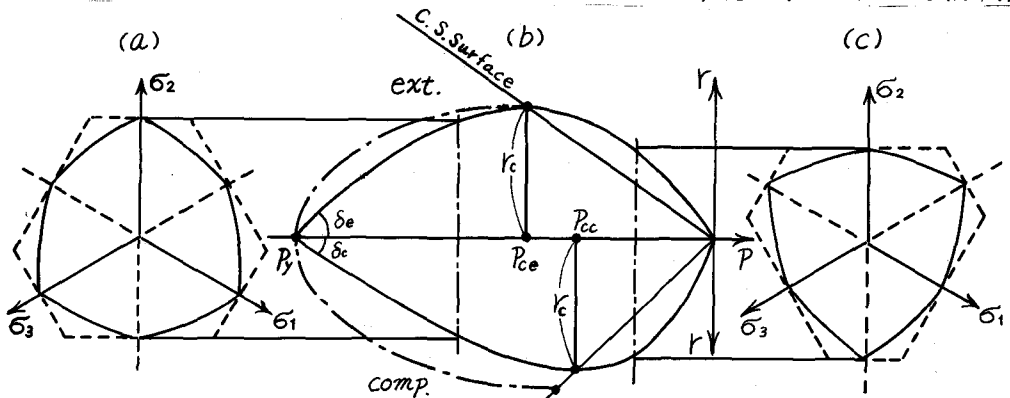
$$\bar{f} = \{(-\sigma_h)^K / (-\sigma_v)\}^{1/(K-1)} \quad (14)$$

式(14)に基づく負荷面は主応力空間において図-1のように示される。同図(b)は P 軸を含む軸対称応力状態における負荷面形状を示す。また、(a)および(c)はそれぞれ正規圧強側および過圧強側における負荷面の P - σ_1 断面による切欠形状を示すが、直線ではなく、僅か下外に何って凸である。なお、真直線は Horne 形式を前提に算びられる負荷応力関数(12)および(13)による負荷面の切欠形状を示している。ところで、図-1からわかるように、正規圧強側では、圧縮状態における $r (= \sqrt{[(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2]/3})$ 値が伸張状態におけるそれより小である。しかし、従来の粘性土質に関する諸実験資料に基づけば、おおよそ同図(b)の一変換線のように、過圧強側におけると同様に圧縮状態の r 値が大であると思われ、この点、Rowe の特性式の妥当性に疑問を感じる。これは式(14)におけるパラメータを垂直応力 σ およびせん断応力 τ に変換すれば、

$$\bar{f} = \left[\left\{ -\sigma - \frac{17}{26} (A+B) \right\}^K / \left\{ -\sigma - \frac{17}{26} (A-B) \right\} \right]^{1/(K-1)} \quad (15)$$

$$A = (K+1)/2, \quad B = \sqrt{[4K\sigma^2 + (K+1)^2 \tau^2]}$$

となり、本式に基づく負荷面が σ - τ 平面において図-2のように一意的に示されることによる必然性であると解される。

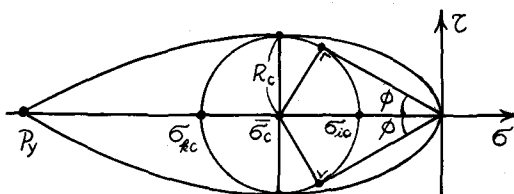


$$r_c = -\sqrt{2/3} P_y (K-1) K^{-K/(K-1)} (>0), \quad M_{ce} = -r_c / P_{ce} = \sqrt{6} \frac{K-1}{2K+1} = \tan \delta_c (>0)$$

$$P_{ce} = \frac{1}{3} P_y (2K+1) K^{-K/(K-1)} (<0), \quad M_{cc} = -r_c / P_{cc} = \sqrt{6} \frac{K-1}{K+2} = \tan \delta_c (>0)$$

$$P_{cc} = \frac{1}{3} P_y (K+2) K^{-K/(K-1)} (<0), \quad P_{ce} / P_{cc} = \frac{2K+1}{K+2} (>1),$$

図-1 Rowe の提案式から算びられる負荷面の主応力空間における形状



$$\sigma_{hc} = P_y K^{-1/(K-1)}$$

$$\sigma_{hc} = P_y K^{-K/(K-1)}$$

$$R_c = \frac{1}{2} \sqrt{2} r_c$$

$$\frac{R_c}{\sigma_c} = -\frac{K-1}{K+1} = -\sin \phi$$

図-2 Rowe の提案式から算びられる負荷面の σ - τ 応力面における形状

III. 構成法則

負荷応力関数式(14)に垂直条件を適用し、等方性の条件を考慮すれば、主塑性正増分 $d\epsilon_i^p, d\epsilon_j^p$ および $d\epsilon_k^p$ は dV^p を比例係数として次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \text{面上 } (\sigma_i > \sigma_j > \sigma_k) : d\epsilon_i^p &= -\frac{\sigma_k}{K\sigma_i - \sigma_k} dV^p, d\epsilon_j^p = 0, d\epsilon_k^p = -\frac{K\sigma_i}{K\sigma_i - \sigma_k} dV^p \\ \text{稜上: 軸対称状態} \left\{ \begin{aligned} \text{圧縮 } (\sigma_i = \sigma_j > \sigma_k) : d\epsilon_i^p &= d\epsilon_j^p = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_k}{K\sigma_i - \sigma_k} dV^p, d\epsilon_k^p = \frac{K\sigma_i}{K\sigma_i - \sigma_k} dV^p \\ \text{伸張 } (\sigma_i > \sigma_j = \sigma_k) : d\epsilon_i^p &= -\frac{\sigma_k}{K\sigma_i - \sigma_k} dV^p, d\epsilon_j^p = d\epsilon_k^p = \frac{K}{2} \frac{\sigma_i}{K\sigma_i - \sigma_k} dV^p \end{aligned} \right. \quad (16) \end{aligned}$$

尖突: 等方応力状態 ($\sigma_i = \sigma_j = \sigma_k$) : $d\epsilon_i^p = d\epsilon_j^p = d\epsilon_k^p = dV^p/3$.

以下、粒状体は塑性的な体積変位により硬化が進展する、すなわち $H = V^p$ と仮定する。ゆえに、硬化関数 $F(V^p)$ は等方圧縮特性から具体的に決めるが、本稿性として $V - \ln |P|$ 線型関係に基づく¹⁾

$$F(V^p) = f_0 \alpha \exp(-V^p/\alpha), \quad dV^p = -\alpha d\tau/f, \quad \alpha: \text{材料定数}, f_0: f \text{ の初期値} \quad (17)$$

と仮定する。式(5)、(14)および(17)より dV^p および V^p は応力をパラメータとして

$$dV^p = \frac{\alpha}{K-1} \left(\frac{d\sigma_i}{\sigma_i} - K \frac{d\sigma_k}{\sigma_k} \right), \quad V^p = -\alpha \ln \left[\left\{ \frac{(-\sigma_k)^K}{-\sigma_i} \right\}^{\frac{1}{K-1}} / f_0 \right] \quad (18)$$

と表わされ、本式を式(16)に用いれば、主応力およびその増分に対して主塑性正増分を求めることになる。

試験条件	軸対称圧縮状態	軸対称伸張状態
σ_a -定	$-\frac{\alpha}{K-1} \ln \frac{K - \frac{\sigma_{a0}}{\sigma_{e0}}}{K \frac{\sigma_e}{\sigma_{e0}} - \frac{\sigma_{a0}}{\sigma_{e0}}}$	$\frac{\alpha K}{K-1} \ln \frac{K \frac{\sigma_{a0}}{\sigma_{e0}} - 1}{K \frac{\sigma_{a0}}{\sigma_{e0}} - \frac{\sigma_r}{\sigma_{e0}}}$
σ_e -定	$-\frac{\alpha K}{K-1} \ln \frac{K \frac{\sigma_{e0}}{\sigma_{a0}} - 1}{K \frac{\sigma_{e0}}{\sigma_{a0}} - 1}$	$\frac{\alpha}{K-1} \ln \frac{K - \frac{\sigma_{e0}}{\sigma_{a0}}}{K - \frac{\sigma_{e0}}{\sigma_a}}$
P -定	$-\frac{\alpha K}{K-1} \ln \left\{ \frac{\frac{\sigma_a}{\sigma_{a0}}}{\left\{ \frac{3K - (K+2) \frac{\sigma_a}{P_0}}{2(K-1) \frac{\sigma_{a0}}{P_0}} \right\}^{\frac{3}{K+2}}} \right\}$	$\frac{\alpha}{K-1} \ln \left\{ \frac{\frac{\sigma_a}{\sigma_{a0}}}{\left\{ \frac{(2K+1) \frac{\sigma_a}{P_0} - 3}{2(K-1) \frac{\sigma_{a0}}{P_0}} \right\}^{\frac{3K}{2K+1}}} \right\}$

表-1 軸対称試験における塑性軸歪の構成式

なお、表-1において σ_a は軸圧、 σ_e は側圧であり、また、 $\epsilon_a^p = 0$ と規定する初期状態における各応力値、あるいは、これらの一定値には下に添字0を付している。

なお、 $V - \ln |P|$ 線型関係¹⁾においては弾性体積変位 V^e は β を材料定数として $V^e = -\beta \ln(P/P_0)$ で与えられ、これによる弾性主歪 $\epsilon_i^e, \epsilon_j^e$ および ϵ_k^e は次のように与えられることはいふまでもない。

$$\epsilon_i^e = \epsilon_j^e = \epsilon_k^e = -\beta \ln(P/P_0)/3. \quad (19)$$

偏応力作用下の弾性変形特性は十分に説明されていないが、IV. において、弾性歪は式(19)に示されるもののみを考慮することにする。

IV. 実験値との比較

前章で示した構成則は本来、

非粘性性材料に対するものである。しかし、本構成則により歪を算定するに際して必要な材料定数を把握した実験資料は見当らない。他方粘性土においては Parry, Henkel 等により比較的精度の良い実験資料が公表されている。そこで、ここでは、Parry²⁾ による Weald clay ($\alpha = 0.0379, \beta = 0.01944$) についての軸対称試験における実験値と前章で導いた構成則による理論算定値を比較し、本構成則の粘性土への適用の可否を検討しておく。図-3に実験値と理論値の比較を示しているが、 K は粒子間マツ角等からは決定し得ないので、限界間角が比状態における σ_k/σ_i の実験値を K とした。同図からわかるように、理論値は歪を過大評価する傾向があるが、これは、図-1に示したように、Rowe式に基づく負荷面が等方圧縮応力側に過度に突出していることによると思われる。

V. おわりに 以上、Rowe-Horneのエネルギー比式に基づく塑性構成則を明らかにした。本構成則は非常に簡潔で、実験問題の解決に際しては都合であるが、粘性土材料に対しては必ずしも適切であるとはいえない。今后、ここに比較検討し得なかった砂や他の非粘性性材料についての実験資料を入手し、これらの材料への適用を検討していく。

1) 土木学会論文報告集, 227号, 1992) Géotechn., Vol. 10, 1960

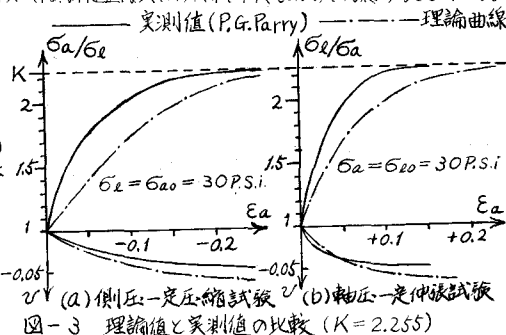


図-3 理論値と実験値の比較 ($K = 2.255$)