V－21　　有限要素法による鉄筋コンクリートばりの応力解析

宮崎大学工学部　学生員　○緒方　紀夫
〃　〃　鬼塚　和雄
〃　正員　中沢　隆雄

1. まえがき　鉄筋コンクリート構造物の破壊現象は，極めて複雑な様相を呈し，そのメカニズムを正確に把握することは困難である。本研究は，そのメカニズムを把握するための1ステップとして，漸増二点集中荷重を受ける腹鉄筋のない単鉄筋コンクリートばりを対象に，破壊に至るまでの過程を有限要素法を用いて解析し，実験結果との比較・検討を行ない，解析方法の妥当性について吟味せんとするものである。なお，解析にあたっては，鉄筋とコンクリートの応力－ひずみ関係の非線型性および鉄筋とコンクリートとの間のすべりを考慮した，平面応力状態を想定している。

2. 解析方法

2-1. コンクリートの解析　コンクリートの降伏および延性破壊曲面は，次式で表わされるものとする。[1),2)]

$$f = \alpha J_1 + J_2^{1/2} \tag{1}$$

ここに，$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$，$J_2 = \frac{1}{6}\{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2\} + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2$，

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$：直応力，$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$：せん断応力，$\alpha$：係数．

ここで，式(1)の f を塑性ポテンシャルとすれば，塑性ポテンシャル理論を用いて次式がえられる。

$$\{d\varepsilon^p\} = \frac{1}{g}\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\} df \tag{2}$$

ここに，$d\varepsilon^p$：塑性ひずみ増分，g：比例係数．

また，弾性論における Hooke の法則は，次式のように表わされる。

$$\{d\sigma\} = [D^e]\{d\varepsilon^e\} \tag{3}$$

ここに，$d\sigma$：応力増分，$[D^e]$：弾性応力－ひずみマトリックス，$d\varepsilon^e$：弾性ひずみ増分

さらに，全ひずみ増分は次式のように，弾性ひずみ増分と塑性ひずみ増分との和で表わされる。

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^p\} \tag{4}$$

以上の式(1)，(2)，(3)および式(4)を用いて，結局塑性域における応力増分－ひずみ増分関係が，次式のように求められる。

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\varepsilon\} \tag{5}$$

ここに，
$$[D] = [D^e] - \frac{[D^e]\{\partial f/\partial\sigma\}\{\partial f/\partial\sigma\}^T[D^e]}{g + \{\partial f/\partial\sigma\}^T[D^e]\{\partial f/\partial\sigma\}} \tag{6}$$

なお，解析手法上，ひずみ硬化係数は正でなければならないので，応力－ひずみ曲線を，図-1に示すように理想化する。応力－ひずみ曲線の折れ曲り点および勾配は，実験モデルを作製したものと同一のコンクリートの円柱供試体の一軸圧縮試験からえられる結果を参照して決定するものとする。

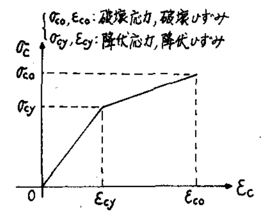

図-1．コンクリートの応力－ひずみ曲線

次に，亀裂の取り扱いについては，主応力がコンクリートの一軸引張強度に達した時亀裂が発生し，その方向は主応力方向に直角であるとする．また，亀裂の発生したコンクリートは，等価直交異方性弾性体と仮定すれば，平面応力場における応力－ひずみ関係は，図-2を参照して次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 \\ \Delta\tau_{12} \\ \Delta\varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & \nu_{12}E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ \nu_{21}E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \\ -\nu_{13} & -\nu_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \\ \Delta\gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{7}$$

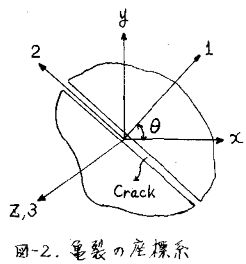

図-2．亀裂の座標系

ここに，Betti-Maxwell の相反定理より $\nu_{12}E_2 = \nu_{21}E_1$，

$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \Delta\tau_{12}$：異方性の対称軸 1, 2, 3 における応力増分，

$\Delta\varepsilon_1, \Delta\varepsilon_2, \Delta\varepsilon_3, \Delta\gamma_{12}$：1, 2, 3 軸に関するひずみ増分，$E, \nu, G$：弾性常数（添字は軸を示す）.

式(7)における未定弾性常数6個を決定するため，次のような仮定を行なう。すなわち，亀裂に直角方向には応力の伝達は行なえないものとし，また，1軸方向のひずみは2軸方向のひずみに影響しないものとする。さらに，亀裂の発生したコンクリートは，せん断応力をも伝達できないものとすれば結局，$E_1 = \nu_{12} = \nu_{21} = \nu_{13} = G_{12} = 0$ となる。E_2, ν_{23} に関しては，2軸方向の直応力 σ_2 による一軸応力状態を想定するが，その数値は亀裂が発生する以前の弾性係数およびポアソン比を用いるものとする。以上の仮定を考慮し式(7)をX, Y, Z軸に変換して次式をうる。

$$
\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\tau_{xy} \\ \Delta\varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_2 S^4 & E_2 S^2 C^2 & -E_2 S^3 C \\ E_2 S^2 C^2 & E_2 C^4 & -E_2 S C^3 \\ -E_2 S^3 C & -E_2 S C^3 & E_2 S^2 C^2 \\ -\nu_{23} S^2 & -\nu_{23} C^2 & \nu_{23} S C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{8}
$$

ここに，$S = \sin\theta$，$C = \cos\theta$，

θ：1軸とX軸とのなす角.

2-2. 鉄筋の解析　鉄筋については，次式に示すHillの平面応力場における直交異方性降伏条件を，塑性ポテンシャルと仮定する。

$$
f^2 = \frac{3}{2(F+G+H)}\left[(G+H)\sigma_x^2 - 2H\sigma_x\sigma_y + (F+H)\sigma_y^2 + 2N\tau_{xy}^2\right] \tag{9}
$$

ここに，F, G, H, N：異方性パラメーター.

塑性域における応力増分－ひずみ増分関係式は，コンクリートの場合と比較して，塑性ポテンシャルの表現形式が異なっているだけであり，同様に式(5)で与えられる。なお，鉄筋の一軸引張試験からえられる応力－ひずみ関係を図-3に示すように，Bi-linearとして理想化する。

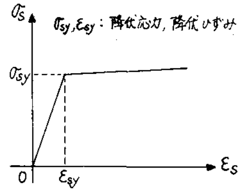

図-3. 鉄筋の応力-ひずみ曲線

2-3. 付着の解析　鉄筋とコンクリートの付着をBond Link[3),4)]と称する仮想的な要素を用いて取り扱う。このBond Linkは，図-4に示すように，鉄筋に平行および直角方向の大きさ零のバネから成り立っているものとする。付着の解析はこのBond Linkのバネ剛性，すなわち付着応力－相対すべり関係を求めることであるが，ここでは簡単化してその関係は線型と仮定して，次式をうる。

$$
\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_h \\ \Delta\sigma_v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_h \\ \Delta\varepsilon_v \end{Bmatrix} \tag{10}
$$

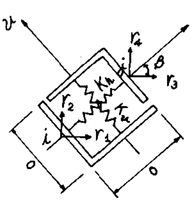

図-4. Bond Link

ここに，$\Delta\sigma_h, \Delta\sigma_v$：鉄筋に平行，垂直方向の付着応力増分，$K_h, K_v$：鉄筋に平行，垂直方向のバネ剛性，

$\Delta\varepsilon_h, \Delta\varepsilon_v$：鉄筋に平行，垂直方向の相対変位増分.

以上で各材料の応力－ひずみ関係が誘導されたので，これらを用いて各要素の剛性マトリックスが，結局次式で求められる。

$$
[k] = t\Delta\,[C^{-1}]^T[B][D][B][C^{-1}] \tag{11}
$$

ここに，$[k]$：各要素の剛性マトリックス，t：各要素の板厚，Δ：各要素の面積，

$[C]$：節点変位－未定係数マトリックス，$[B]$：ひずみ－未定係数マトリックス，$[D]$：応力－ひずみマトリックス.

なお，解析結果および実験結果についての報告は，講演時にゆずる。

参考文献　1) H.Kupfer, H.K.Hilsdorf, H.Rusch：Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses, ACI/August, 1969, p656～666.

2) 黒正清治，滝口克己：有限要素法による鉄筋コンクリート部材の二次元解析（その1．仮定および解析方法）日本建築学会論文報告集，第189号，昭和46年11月.

3) D.Ngo, A.C.Scordelis：Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams, ACI/March, 1967, p152～163.

4) A.H.Nilson：Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by the Finite Element Method, ACI/September, 1968, p757～766