Ⅳ－6　　地下定常密度流の近似解について

九州大学　工学部　正員　上田　年比古
〃　○　〃　神野　健二
〃　　学生員　中尾　憲治

1　序

本報では自由境界面を近似的に算定する方法について検討した。従来より塩水楔などの自由境界面形状を近似的に算定するには準一様流などを仮定し求めた方法が文献1),2),3)などに要約されているが本報告では自由境界面の流線の方程式を考慮してその近似解析について検討してみた。

2．解析方法

解析の方法は自由境界面が一つの流線であるという条件；$u_s^2+v_s^2+a\,v_s=0$ ……(1)[4] を用いる。ここに a は(イ)自由表面の場合には透水係数 k (cm/sec), (ロ)淡塩境界面の場合には $-(\rho_s-\rho_f)/\rho_f\cdot k$，ここに ρ_s, ρ_f は海水，淡水の密度。解析の手順は次のようである。①水平流速の仮定②連続の式より鉛直流速を求める③(1)式を用いて境界面形状を求める④鉛直流速についてDarcy則を適用して圧力分布を求める⑤③,④から流量自由境界などを求める。

3．解析例(Ⅰ)

図－1に示す2次元自由表面の形状，流量を求めてみる。

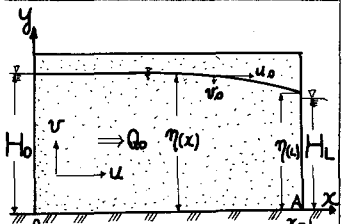


図-1

いま水平流速 u を近似的に　$u\doteqdot Q_0/\eta(x)$ …… (2)　と仮定する。$y=0$ で $v=0$ であることを考慮し連続の式により $v=-\int_0^y \partial u/\partial x\,dy=(Q_0y/\eta^2(x))\,d\eta/dx$ …(3) 自由表面上では $u_s=Q_0/\eta(x)$, $v_s=(Q_0/\eta(x))\,d\eta/dx$ であるから(1)式に代入すると，$(d\eta/dx)^2+(k\eta/Q_0)\cdot d\eta/dx+1=0$ ……(4)　根の公式により $d\eta/dx$ を求めると　$d\eta/dx=\{-k\eta\pm\sqrt{k^2\eta^2-4Q_0^2}\}/2Q_0$　となるが　$d^2\eta/dx^2<0$ でなければならないので正号をとり $x=0$ で $\eta=H_0$ の境界条件のもとに積分すると次式をうる。

$$x=k(H_0^2-\eta^2)/4Q_0+k\left[H_0\sqrt{H_0^2-4Q_0^2/k^2}-\eta\sqrt{\eta^2-4Q_0^2/k^2}\right]/4Q_0-(Q_0/k)\ln\left\{\left(H_0+\sqrt{H_0^2-4Q_0^2/k^2}\right)/\left(\eta+\sqrt{\eta^2-4Q_0^2/k^2}\right)\right\} \quad \cdots\cdots(5)$$

次に流量 Q_0 を定めよう。Darcy則を(3)式に適用すると、p を圧力分布として $(Q_0y/\eta^2)\,d\eta/dx=-(k/\rho_fg)\,\partial(p+\rho_fgy)/\partial y$ したがって y について積分し $y=\eta(x)$ 上で $p=0$（大気圧）とすれば $p=(\rho_fgQ_0/2k)\{(\eta^2-y^2)/\eta^2\}\,d\eta/dx+\rho_fg(\eta-y)$ ……(6)

さらに図－1中A点($x=L$, $y=0$)の圧力が湛水静水圧 ρ_fgH_L に等しいと仮定すると　$\rho_fgH_L=(\rho_fgQ_0/2k)\cdot d\eta/dx\big|_{x=L}+\rho_fg\eta(L)$ …(7)

ここに　$d\eta/dx\big|_{x=L}=\{-k\eta(L)+\sqrt{k^2\eta(L)^2-4Q_0^2}\}/2Q_0$　である。(5)式に $x=L$ を代入すれば $\eta(L)$ と Q_0 の関係式をうることができ

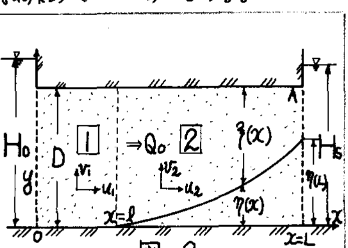
$$L=k(H_0^2-\eta(L)^2)/4Q_0+k\left[H_0\sqrt{H_0^2-4Q_0^2/k^2}-\eta(L)\sqrt{\eta(L)^2-4Q_0^2/k^2}\right]/4Q_0-(Q_0/k)\ln\left\{\left(H_0+\sqrt{H_0^2-4Q_0^2/k^2}\right)/\left(\eta(L)+\sqrt{\eta(L)^2-4Q_0^2/k^2}\right)\right\} \quad \cdots\cdots(8)$$

(7)式と(8)式とから未知数 $\eta(L)$ と Q_0 が算定でき(5)式，(6)式によって自由表面形や任意点の圧力分布が求められる。

4．解析例(Ⅱ)

図－2に示す被圧の塩水楔形状を求める。領域を$\boxed{1}$，$\boxed{2}$に分割する。

(イ)$\boxed{1}$領域について；鉛直流速 $v_1=0$ だから圧力分布 p_1 は　$p_1=\rho_fg(H_0-y)-(\rho_fgQ_0/kD)\,x$ ……(9)　をうる。



図－2

(ロ)$\boxed{2}$領域について；水平流速 $u_2=Q_0/(D-\eta(x))$ ……(10)　で近似する。鉛直流速 v_2 は　$y=D$ 上で $v_2=0$ であることを考慮し連続の式により次式をうる。$v_2=Q_0(D-y)/(D-\eta)^2\cdot d\eta/dx$ ……(11)，$u_{2s}=Q_0/(D-\eta)$，$v_{2s}=Q_0/(D-\eta)\cdot d\eta/dx$　を(1)式に代入し整理すると　$(d\eta/dx)^2-(k\varepsilon(D-\eta)/Q_0)\,d\eta/dx+1=0$ ……(12)　ここに ε は $\varepsilon=(\rho_s-\rho_f)/\rho_f$ である。$\xi(x)=D-\eta(x)$，$d^2\eta/dx^2>0$，$x=l$ で $\eta(l)=0$，$\xi(l)=D$ なる条件を用い(12)式を積分して　$k'=\varepsilon k/Q_0$　として次式をうる。

$$x=k'(D^2-\xi^2)/4+k'\left[D\sqrt{D^2-4/k'^2}-\xi\sqrt{\xi^2-4/k'^2}\right]/4-\ln\left\{\left(D+\sqrt{D^2-4/k'^2}\right)/\left(\xi+\sqrt{\xi^2-4/k'^2}\right)\right\}/k'+l \quad \cdots(13)$$

次に(11)式にDarcy則を適用し淡塩境界面上で $p_2=\rho_sg(H_s-\eta(x))$ を仮定して p_2 を定めると次式をうる。

$$p_2=(\rho_fgQ_0/2k)\left[(D-y)^2/(D-\eta)^2-1\right]d\eta/dx-\varepsilon\rho_fg+(1+\varepsilon)\rho_fgH_s-\rho_fgy \quad \cdots\cdots(14)$$

(ハ)$\boxed{1}$，$\boxed{2}$領域の接続について；$x=l$ で圧力の連続条件について考えてみよう。(9)，(14)式に $x=l$ を代入して

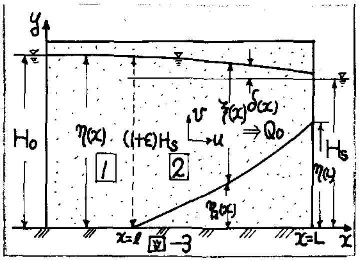
$p_2-p_1=\rho_fg((1+\varepsilon)H_s-H_0)+\rho_fg\,l\,Q_0/kD+(\rho_fgQ_0/2k)\left[(D-y)^2/D^2-1\right]d\eta/dx\big|_{x=l}$ ……(15)　この式で　$y=0$ のとき $p_2=p_1$ と

すれば　$l=(H_0-(1+\varepsilon)H_s)kD/Q_0$ ……(16)をうる。これは$\boxed{2}$領域を準一様流として求めた場合のlに等しい。$y\fallingdotseq 0$の点では圧力の連続条件はこのときには成り立たないが塩水楔先端の点lはこのための誤差の影響をさほど受けないものと考えられる。次に図－２中Ａ点の圧力が塩水静水圧：$\rho_f(1+\varepsilon)(H_s-D)g$に等しいと仮定すると、

$((1+\varepsilon)H_s-D)=-(Q_0/2k)\,d\eta/dx\big|_{x=L}+(H_s-D)+\varepsilon(H_s-\eta(L))$ ……(17)　一方$\eta(L)$は(13)式に$x=L$を代入すれば

$L=k'(D^2-\xi(L)^2)/4+k'\{D\sqrt{D^2-4/k'^2}-\xi(L)\sqrt{\xi(L)^2-4/k'^2}\}/4-\ln\{(D+\sqrt{D^2-4/k'^2})/(\xi(L)+\sqrt{\xi(L)^2-4/k'^2})\}/k'+l$ ……(18)

(16),(17),(18)式において未知量は$l,\eta(L),Q_0$であるからこれらが定まる。



図－3

5. 解析例(III)　上述の例では未知の境界面が１つであったが図－３のような場合には未知の境界面は自由表面$\delta(x)$と淡塩境界面$\eta_2(x)$の２つである。いま$\xi(x)\equiv H_s-\eta_2(x)+\delta(x)$として$y=H_s+\delta(x)$上での鉛直流速を$v_f(x)$とし、$u=Q_0/\xi(x)$と連続の式とから　$v=(Q_0/\xi^2)\cdot d\xi/dx\cdot(y-H_s-\delta)+v_f$ ……(19)

$y=H_s+\delta(x)$および$y=\eta_2(x)$上で(1)式を立てると自由表面上においては、$(Q_0/\xi)^2+v_f^2+kv_f=0$ …(20)　淡塩境界面上においても同様に次式をうる。

$(Q_0/\xi)^2+\{-Q_0/\xi\cdot d\xi/dx+v_f\}^2-k\varepsilon(-Q_0/\xi\cdot d\xi/dx+v_f)=0$ ……(21)．$v_f^2\ll 1$として(20)式から$v_f\doteqdot -Q_0^2/(k\xi^2)$，これを(21)式に代入すれば　$(d\xi/dx)^2+(2Q_0/k\xi-k\varepsilon\xi/Q_0)d\xi/dx+(1+\varepsilon)=0$ ……(22)，$\xi(x)$は$\eta_2(x)$の性質に支配されるので$d^2\xi/dx^2<0$を考慮し$x=l$で　$\xi(l)=(1+\varepsilon)H_s$を仮定すれば(22)式を積分し$\xi(x)$をうる。

$$x=[(\varepsilon k/2Q_0)\{(1+\varepsilon)^2H_s^2-\xi^2\}+k\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}/Q_0\cdot\{\sqrt{(1+\varepsilon)^4H_s^4-4Q_0^2H_s^2(1+\varepsilon)^2/k^2\varepsilon^2+4Q_0^4/k^4}-\sqrt{\xi^4-4Q_0^2\xi^2/k^2\varepsilon^2+4Q_0^4/k^4}\}$$
$$+(2Q_0/k)\ln\{H_s(1+\varepsilon)/\xi\}+(2Q_0(1-\varepsilon^2)/k\varepsilon)\ln\{(H_s^2(1+\varepsilon)^2-Q_0^2/k^2)/(\xi^2-Q_0^2/k^2)\}]/2(1+\varepsilon)+l \quad\text{……(23)}$$

(19)式にDarcy則を適用し淡塩境界面上で海水静水圧に等しいとすれば圧力分布p_2は次のように求められる。

$$p_2=(\rho_f gQ_0/2k)\cdot[1-(y-H_s-\delta)^2/\xi^2]d\xi/dx+(\rho_f gQ_0^2/k^2\xi^2)\cdot(y-\eta_2)+(1+\varepsilon)\rho_f g(H_s-\eta_2)-\rho_f g(y-\eta_2) \quad\text{……(24)}$$

$y=H_s+\delta(x)$上では　$p_2=(\rho_f gQ_0/2k)\cdot d\xi/dx+\rho_f gQ_0^2/k^2\xi+(1+\varepsilon)\rho_f g(H_s-\eta_2)-\rho_f g\xi$ ……(25)　この式で$p_2=0$とすれば右辺第１，第２項がない場合は　$\xi(x)=(1+\varepsilon)(H_s-\eta_2(x))$となってHerzbergの仮定をうる。次に図中$\boxed{1}$領域については(4)式の第１項を無視した解：$x=k(H_0^2-\eta(x)^2)/2Q_0$に$x=l$で　$\eta(l)=(1+\varepsilon)H_s$を与えると次式をうる。

$l=k(H_0^2-(1+\varepsilon)^2H_s^2)/2Q_0$ ……(26)　(23)式で$x=L$で$\xi(L)$とした式，(25)式で$p_2=0$，$\xi(L)$，$\eta_2(L)$および$d\xi/dx|_{x=L}$を入れた式、および(26)式の３式について未知数は$Q_0,l,\xi(L),\eta_2(L)$の４つとなる。いま、この現象で流量については準一様流とみなしても比較的よい精度で流量が求められると嶋ら[1]によりのべられていることに基づいて，ここで

$Q_0=k\{H_0^2-(1+\varepsilon)H_s^2\}/(2L)$ ……(27)　を用いれば上記４つの未知数を求めうる。

6. 考察

この近似法では水平流速が高さ方向にそれほど変化しないような場合を仮定している。しかしいずれの解析においても基本となる微分方程式はすべて同じ形式であり，水平流速の仮定が決定的な役割を果している。(5)式の解でもまた(13)式，(23)式でも第１，第２がほぼ同じ程度で第３項は前者に比べてかなり小さい場合には(5)式は、準一様流の仮定のDupuit-Forchheimerの解に一致し，(13)，(23)式も準一様流の解に一致する。これは基本となる微分方程式(4)，(12)，(23)式において形状曲線の勾配の２乗が無視できる場合に相当する。なお，実験結果および解析法などとの比較検討，この解析法の適用限界および塩水楔の物理的性質について今後考察を行ってゆくつもりである。

参考文献

1)　「地下水（密度流的諸問題）」：嶋祐之、水工学に関する夏期講習会（1971年）p. A-8-1
2)　「鉛直流速の影響を考慮した堤体浸透流の非定常現象」：嶋祐之．昭和43年土木学会年次講演会概要集p.419
3)　「土の中の水の動き」：土質工学ハンドブック　第4章．p75
4)　「Dynamics of Fluids in Porous Media」：Jacob Bear．American elsevier publishing company, inc. p517