

九州大学工学部 正 員 彦坂 照

" 学生員 大塚久哲

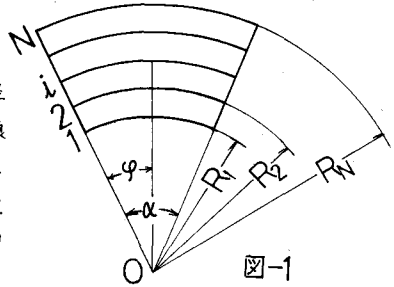
" " 〇米田利博

## 1. 緒言

本研究は、複数のI形または箱形断面の曲線主桁が横桁で結合された通常の曲線橋について、横断面の変形を考慮した自由振動および走行荷重応答の解析法を提示し、横断面の形状変化を考えない既往の曲線はり理論<sup>1)</sup>による結果と比較するとともに、断面のおじり剛性、そり剛性、ねじり慣性などが曲線橋の振動特性におよぼす影響を考察せんとするものである。曲線橋では直線橋に比して密に直線横桁が配置されるが、これらも個々に直線部材として取扱えば変形の自由度が著しく増大するゆえ、ここでは横桁を法線方向の曲げ剛性のみをもつ板に置換し、その質量は各主桁に集中させて取扱う。

## 2. 多主桁曲線橋の自由振動解析

図-1のように、実Oを曲率中心として、中心角 $\alpha$ 、曲率半径 $R_1, R_2, \dots, R_N$ なるN本の主桁が適宜の数の横桁で結合された曲線橋を考える。いま、任意の主桁 $i$ の曲げ剛性を $EI_i$ 、ねじり剛性を $GJ_i$ 、そり剛性を $EI_{oi}$ 、ねじり回転半径を $\alpha_i$ 、単位長さ当りの質量を $\rho_i$ とし、時刻 $t$ において、任意点 $\varphi$ の鉛直たわみおよびおじり角をそれぞれ $w_i, \theta_i$ とすれば、次の運動方程式がえられる。



$$\left. \begin{aligned} \frac{EI_i}{R_i^3} \left\{ (1+\gamma_i) \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} - \mu_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} + (1+\mu_i) \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \varphi^2} - \gamma_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \varphi^2} \right\} + R_i \rho_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} &= -R_i (v_i + \bar{v}_i) \\ \frac{EI_i}{R_i^3} \left\{ (1+\mu_i) \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} - \gamma_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} + \psi_i - \mu_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \varphi^2} + \gamma_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \varphi^2} \right\} + \frac{\alpha_i^2}{R_i} \rho_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} &= - (m_i + \bar{m}_i) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 $\psi_i = R_i \theta_i$ ,  $\mu_i = GJ_i/EI_i$ ,  $\gamma_i = I_{oi}/R_i^2 I_i$

また、式(1)の右辺の $v_i, \bar{v}_i, m_i, \bar{m}_i$ は主桁と横桁の結合力で、変断面直線線のたわみ角式を利用することにより次のように変形量で表わされる。<sup>2)</sup>

$$\begin{bmatrix} R_i v_i \\ m_i \\ R_{i+1} \bar{v}_{i+1} \\ \bar{m}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i \{ S_i (1+\bar{\gamma}_{i+1}) + \bar{S}_{i+1} (1+\gamma_i) \} / b_i^2 & S_i / R_i & \text{symmetry} & \\ (S_i + \bar{S}_{i+1} \gamma_i) / b_i & & & \\ -R_i \{ S_i (1+\bar{\gamma}_{i+1}) + \bar{S}_{i+1} (1+\gamma_i) \} / b_i^2 & -(S_i + \bar{S}_{i+1} \gamma_i) / b_i & R_i \{ S_i (1+\bar{\gamma}_{i+1}) + \bar{S}_{i+1} (1+\gamma_i) \} / b_i^2 & \\ R_i (\bar{S}_{i+1} + S_i \bar{\gamma}_{i+1}) / R_{i+1} b_i & S_i \bar{\gamma}_{i+1} / R_{i+1} & -R_i (\bar{S}_{i+1} + S_i \bar{\gamma}_{i+1}) / R_{i+1} b_i & R_i \bar{S}_{i+1} / R_{i+1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \psi_i \\ w_{i+1} \\ \psi_{i+1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここに、 $b_i = R_{i+1} - R_i$ ,  $S_i, \bar{S}_{i+1}$ は $i$ および $i+1$ 端の端剛度、 $\gamma_i, \bar{\gamma}_{i+1}$ はモーメント分配法で慣用の到達率。

曲線橋の境界条件を単純支持( $\varphi=0, \alpha \pm w_i=0, \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2}=0, \psi_i=0, \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \varphi^2}=0$ )とすれば、波数 $n$ の固有円振動数を $\omega_n$ として、境界条件を満足する式(1)の解が次式で与えられる。

$$w_i = w_{in} \sin \frac{n\varphi}{\alpha} \sin \omega_n t, \quad \psi_i = \psi_{in} \sin \frac{n\varphi}{\alpha} \sin \omega_n t \quad (3)$$

すべての主桁( $i=1, 2, \dots, N$ )について式(3)を式(1)に代入のうえ、式(2)を用いて式(1)の右辺を消去すれば、結局次式がえられる。

$$\left( \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}_n - \omega_n^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M' \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w_n \\ \psi_n \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

ここに、 $w_n = (w_{1n} w_{2n} \dots w_{Nn})^T$ ,  $\psi_n = (\psi_{1n} \psi_{2n} \dots \psi_{Nn})^T$ ,  $K$ は剛性マトリックス,  $M = [R_1 \rho_1 \dots R_N \rho_N]$  (対角行列),  $M' = [a_1^2 \rho_1 / R_1 \quad a_2^2 \rho_2 / R_2 \quad \dots \quad a_N^2 \rho_N / R_N]$  (対角行列)

一般に、個々の主桁のおじり慣性は無視できるので、 $M' = 0$ とおけば式(4)から $\psi_n$ が消去される。すなわち

$$(K_n' - \omega_n^2 M) W_n = 0, \quad \text{ただし } K_n' = (K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}) \quad (5)$$

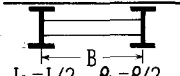
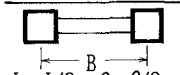
$$\bar{\omega}_n = -K_{22}^{-1} K_{21} W_n \quad (6)$$

式(5)の係数行列式  $|K_n' - \omega_n^2 M| = 0$  なる条件より  $N$  個の固有円振動数  $\omega_n$  が求められ、同じく  $N$  組の固有ベクトルが算定できる。

計算例1: 表-1は、Type A, B, Cの3種の断面をもつ非合成曲線橋の1~6次の固有円振動数を、本論による場合と、横断面の変形を無視した曲線はり理論による場合について算定し、結果をまとめたものである。

ただし、中心角  $\alpha$ 、スパン  $L$  (断面中心の曲線長)、桁間隔  $B$ 、全断面の曲げ剛性  $EI$  および単位長当りの質量  $\rho$  は各 Type と共通とした。

表-1 固有円振動数 ( $\times \sqrt{EI/\rho L^4}$ )  $\alpha = 30^\circ$ ,  $B = L/8$

| 断面の形状<br>及び諸値                                                                                                                                    | 振<br>動<br>次<br>数 | 横断面の変形考慮  |           |           | 横断面の変形無視(曲線はり理論) |           |           |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|-----------|-----------|-----------|------------------|-----------|-----------|-----------|
|                                                                                                                                                  |                  | 横桁の換算曲げ剛性 |           |           | ねじり慣性考慮          |           | ねじり慣性無視   |           |
|                                                                                                                                                  |                  | 0.01EI/B  | 0.1 EI/B  | 1.0 EI/B  | そり剛性考慮           | そり剛性無視    | そり剛性考慮    | そり剛性無視    |
| TYPE A<br><br>$I_t = I/2$ , $\rho_t = \rho/2$<br>$GJ/EI = 1/40$ | 1                | 6.957 (M) | 7.194 (M) | 7.071 (M) | 7.339 (M)        | 5.365 (M) | 8.004 (M) | 6.604 (M) |
|                                                                                                                                                  | 2                | 16.60 (T) | 13.94 (T) | 17.24 (T) | 16.57 (T)        | 14.21 (T) |           |           |
|                                                                                                                                                  | 3                | 33.93 (M) | 32.89 (M) | 34.48 (M) | 36.04 (M)        | 15.36 (M) | 38.47 (M) | 34.68 (M) |
|                                                                                                                                                  | 4                | 46.43 (T) | 47.11 (T) | 48.47 (T) | 42.29 (T)        | 23.64 (M) |           |           |
|                                                                                                                                                  | 5                | 79.64 (M) | 75.99 (M) | 80.71 (M) | 84.53 (M)        | 31.69 (M) | 88.19 (M) | 83.55 (M) |
|                                                                                                                                                  | 6                | 97.45 (T) | 102.8 (T) | 101.1 (T) | 96.34 (T)        | 39.67 (M) |           |           |
| TYPE B<br><br>$I_t = I/3$ , $\rho_t = \rho/3$<br>$GJ/EI = 1/40$ | 1                | 6.916 (M) | 6.976 (M) | 6.982 (M) | 7.117 (M)        | 5.743 (M) | 7.713 (M) | 6.604 (M) |
|                                                                                                                                                  | 2                | 18.75 (T) | 19.06 (T) | 19.10 (T) | 18.53 (T)        | 16.26 (T) |           |           |
|                                                                                                                                                  | 3                | 34.22 (M) | 34.58 (M) | 34.63 (M) | 35.84 (M)        | 18.51 (M) | 38.18 (M) | 34.68 (M) |
|                                                                                                                                                  | 4                | 48.57 (T) | 49.79 (T) | 49.94 (T) | 48.15 (T)        | 28.88 (M) |           |           |
|                                                                                                                                                  | 5                | 80.38 (M) | 81.28 (M) | 81.43 (M) | 84.45 (M)        | 38.78 (M) | 88.02 (M) | 83.55 (M) |
|                                                                                                                                                  | 6                | 98.87 (T) | 101.5 (T) | 101.9 (T) | 98.04 (T)        | 41.24 (T) |           |           |
| TYPE C<br><br>$I_t = I/2$ , $\rho_t = \rho/2$<br>$GJ/EI = 3$  | 1                | 9.523 (M) | 9.527 (M) | 9.527 (M) | 9.543 (M)        | 9.542 (M) | 9.552 (M) | 9.551 (M) |
|                                                                                                                                                  | 2                | 38.80 (M) | 39.02 (M) | 39.04 (M) | 39.12 (M)        | 39.12 (M) | 39.16 (M) | 39.16 (M) |
|                                                                                                                                                  | 3                | 40.88 (T) | 75.23 (T) | 86.94 (T) | 88.10 (T)        | 87.55 (T) |           |           |
|                                                                                                                                                  | 4                | 58.80 (T) | 87.91 (M) | 88.17 (M) | 88.42 (M)        | 88.41 (M) | 88.51 (M) | 88.51 (M) |
|                                                                                                                                                  | 5                | 85.96 (M) | 116.7 (T) | 156.8 (M) | 157.4 (M)        | 157.4 (M) | 157.6 (M) | 157.6 (M) |
|                                                                                                                                                  | 6                | 101.9 (T) | 153.3 (T) | 168.0 (T) | 178.9 (T)        | 174.5 (T) |           |           |

(M): 曲げの卓越する振動

(T): おじりの卓越する振動

### 3. 多主桁曲線橋の走行荷重応答

図-1の多主桁曲線橋の任意の主桁  $i$  上に強度  $g_i(t)$  なる強制外力が働くものとする。外力  $g_i(t)$  をフーリエ級数に展開して  $g_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{in}(t) \sin \frac{n\pi y}{\alpha}$  とおけば、自由振動の式(5)に代わる次の運動方程式をうる。

$$K_n' W_n + M \ddot{W}_n = \{R_i g_{in}(t)\} \quad (7)$$

周知のように、式(5)からえられる固有値、固有ベクトルを利用すれば、modal analysis により式(7)の  $W_n$  を各  $n$  ごとに求めることができ、 $N$  本の主桁のたわみ  $W = (w_1 w_2 \dots w_N)^T$  およびねじり角  $\bar{\omega} = (\psi_1 \psi_2 \dots \psi_N)^T$  の応答が次式で求められる。

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin \frac{n\pi y}{\alpha} \quad \bar{\omega} = - \sum_{n=1}^{\infty} K_{22}^{-1} K_{21} W_n \sin \frac{n\pi y}{\alpha} \quad (8)$$

ところで、波数  $1, 2, \dots, n$  に対する固有値は合計  $n \times N$  個えられるが、modal analysis はそれらの中で低次の  $r$  個の固有値  $\omega$  と、それに対応する  $r$  組の固有ベクトルを利用して行うものとする。 $r$  組の固有ベクトルを  $D = (D_1 D_2 \dots D_r)$ 、一般座標を  $\bar{\omega}(t) = (\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 \dots \bar{\omega}_r)^T$  とおけば、式(8)は次のように書き換えられる<sup>3)</sup>

$$W = (D \sin \frac{n\pi y}{\alpha}) \bar{\omega}(t) \quad \bar{\omega} = - (K_{22}^{-1} K_{21} D \sin \frac{n\pi y}{\alpha}) \bar{\omega}(t) \quad (9)$$

ここに、 $(D \sin \frac{\pi r v}{\alpha})$  は、 $D$  の  $1 \sim r$  次の固有ベクトルの波数  $n$  に対応する  $\sin \frac{\pi n v}{\alpha}$  をそれぞれのベクトルに掛けることを意味する。なお、式(9)の  $W$ 、 $\bar{u}$  を用いれば各種の断面力の応答が算定され、たとえば  $N$  本の主桁の曲げモーメント  $M_B = (M_{B1} M_{B2} \dots M_{BN})^T$  の応答は  $M_B = -\{EI_i/R_i^2\} (\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \bar{u})$  (10)

いま、時間  $t$  とともに大きさが任意に変化する1個の集中荷重  $P(t)$  が一定速度  $v$  で主桁  $i$  上を走行する場合を考える。 $\omega_{nv} = \pi v / R_i \alpha$  とおけば  $g_{in}(t) = \frac{2}{R_i \alpha} P(t) \sin \omega_{nv} t$  (11)

となり、また  $D$  の中で主桁  $i$  の固有ベクトルを  $d_i = (d_{i1} d_{i2} \dots d_{ir})$  とすれば、一般座標  $\bar{u}(t)$  に関する次の微分方程式がえられる。 $\ddot{\bar{u}} + [\Omega^2] \bar{u} = \frac{2}{\alpha} L^{-1} (d_i \sin \omega_{nv} t)^T P(t)$  (12)

ここに、 $[\Omega^2] = [\omega_1^2 \omega_2^2 \dots \omega_r^2]$  ( $r \times r$  の対角行列)  $L = D^T M D$  ( $r \times r$  の対角行列)  
また  $(d_i \sin \omega_{nv} t)$  は、 $d_i$  の  $1 \sim r$  次の要素の波数  $n$  に対応する  $\sin \omega_{nv} t$  を、それぞれの要素に掛けることを意味する。なお、橋梁の減衰を考慮する場合は、式(12)の左辺に減衰項  $2[H] \dot{\bar{u}}$  を加えてやればよい。

ここに、 $[H] = [h_1 \omega_1 h_2 \omega_2 \dots h_r \omega_r]$  ( $r \times r$  の対角行列、 $h_r$  は  $r$  次の減衰定数)

(A)  $P(t) = P = \text{一定}$  の場合の解

初期条件を、 $t = 0$  において  $\dot{W} = \dot{\bar{u}} = 0$  とし、式(12)の解を式(9)に代入すれば、

$$W = \frac{2}{\alpha} P (D \sin \frac{\pi r v}{\alpha}) L^{-1} ([\Omega^2 - \Omega_v^2])^{-1} ([\sin \omega_{nv} t] - [\Omega_v] [\Omega^{-1}] [\sin \omega_{nv} t]) d_i^T \quad (13)$$

ここに、 $[\Omega^2 - \Omega_v^2]$ 、 $[\sin \omega_{nv} t]$ 、 $[\Omega_v]$ 、 $[\Omega^{-1}]$ 、 $[\sin \omega_{nv} t]$  はそれぞれ  $\omega^2 - \omega_{nv}^2$ 、 $\sin \omega_{nv} t$ 、 $\omega_{nv}$ 、 $\omega^{-1}$ 、 $\sin \omega_{nv} t$  の  $r \times r$  の対角行列である。なお、式(13)の  $D$  の代わりに  $-K_{22}^{-1} K_{21} D$  とおけば  $\bar{u}$  がえられる。

計算例2: 計算例1のType AおよびType Cの曲線橋(ただし、横桁の換算曲げ剛性  $= 0.0125 EI/B$ ) について、大きさ一定の荷重  $P$  が外桁上を走行する場合の外桁中央の動的たわみ応答(静的たわみの最大値を1とする)を求めれば、図-2の結果をうる。ここに、速度パラメーター  $A_v$  は、「曲線橋と同じ断面およびスパン  $L$  をもつ直線ばりの第1次固有周期の  $1/2$  と、荷重が外桁を通過するに要する時間との比」を表わす。また、図-3は、外桁中央の動的たわみおよび曲げモーメント応答の最大値の速度パラメーター  $A_v$  による変化の様態を示したものである。

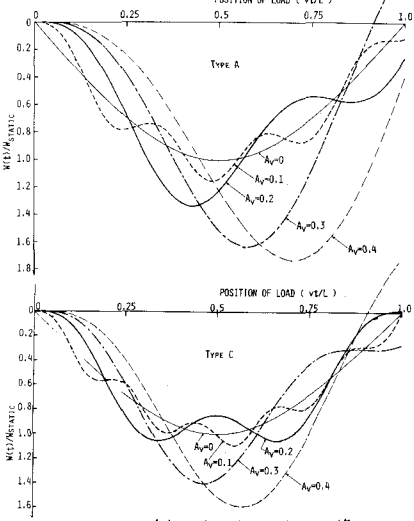
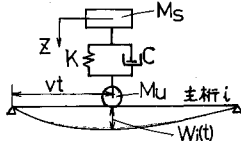


図-2 外桁中央の動的たわみ応答

(B) sprung mass が走行する場合の方程式

走行荷重を図-4のような質量  $M_s$  と  $M_u$  がばね定数  $k$  のばねと減衰係数  $C$  の dash-pot で結合された振動系に置換し  $M_s$  の変位を  $z$  とすれば、



$$P(t) = (M_s + M_u)g - M_u \ddot{w}_i - M_s \ddot{z} \quad (14)$$

図-4

ここに  $g$  は重力の加速度、 $\ddot{w}_i$  は主桁  $i$  の荷重直下のたわみ。式(14)を式(12)の右辺に代入のうえ整理すれば、

$$\ddot{\bar{u}} + \frac{2}{\alpha} M_u L^{-1} (d_i \sin \omega_{nv} t)^T [(d_i \sin \omega_{nv} t) \bar{u}] + [\Omega^2] \bar{u} = \frac{2}{\alpha} \{ (M_s + M_u)g - M_s \ddot{z} \} L^{-1} (d_i \sin \omega_{nv} t)^T \quad (15)$$

$$\text{ここに } M_s \ddot{z} = k \{ (d_i \sin \omega_{nv} t) \bar{u} - z \} + C \{ (d_i \sin \omega_{nv} t) \dot{\bar{u}} - \dot{z} \} \quad (16)$$

式(15)、(16)を  $\bar{u}$  と  $z$  の連立微分方程式として数値積分すればよい。

[参考文献] 1) 例えば S. Komatsu and H. Nakai: Trans. of JSCE, No. 136, Dec. 1966  
2) 房坂内谷大塚: 土木学会第29回年次学術講演概要集, 昭和49年10月  
3) J.W. Smith: Earthquake Engineering and Structural Dynamics Vol.1, 1973

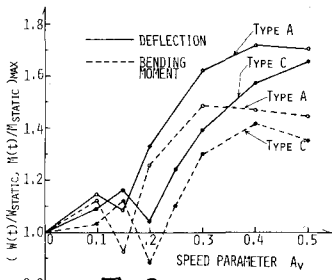


図-3