

長崎大学工学部 正員 高橋和雄

長崎大学工学部 学生員 〇川路雅隆

長崎大学工学部

山本廣志

1. 緒言 著者らは Kármán の有限変形理論に基づいて軸対称円板の非線形自由振動を多自由度系として解析し、既往の 1 自由度系の仮定は不十分であることを明らかにした¹⁾。つづいて、本論文では圓周外力が作用する円板の非線形定常強制振動を多自由度系として解析し、主共振、高調波共振、分數調波共振および内部共振などの諸現象、またこれらに及ぼす減衰の影響を明らかにするものである。

2. 解法 低次の曲げ振動を対象とすれば、板の面内方向の慣性力、せん断変形および回転慣性の影響を無視することができ、サフ軸対称振動を取り扱うものとするれば、本題の運動方程式は板の有限変形に関する Kármán の式に面外方向の慣性力、線形粘性減衰力および等分布強制外力の項を考慮した次式によって与えられる。

$$\nabla^4 W = -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \quad (1) \quad L(\omega, W) = D \nabla^4 W + P R \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + C \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{P}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \frac{\partial W}{\partial t} \right) - p \cos \Omega t = 0 \quad (2)$$

ここに、 E : Airy の応力関数、 E : 板のヤング率、 W : 板のたわみ、 $D = ER^4/12(1-\nu^2)$: 板剛度、 ν : ポアソン比、 R : 板厚、 C : 粘性減衰係数、 ρ : 板の密度、 t : 時間、 P : 外力の荷重振幅、 r : 板の半径方向の座標、 Ω : 外力の円振動数、 $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) \right]$

基礎式(1)および(2)を解くために板のたわみ W を次のように変数分離形に仮定する。

$$W = R_n \sum_{m=1}^{\infty} R_m(r) T_m(t) \quad (3)$$

ここに、 R_n : 単純支持(I), または固定(II)の曲げに対する与えられた境界条件を満足する座標関数、 T_n : 未知の時間関数式(3)の座標関数として、円板の非減衰曲げ振動の規準関数を用いるものとする。式(3)を式(1)に代入して、面内変位拘束(a)および面内変位自由(b)の境界条件のもとに座標関数を求めれば次のように与えられる。

$$F = -\frac{E}{1-\nu^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_n T_m \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{j,k} M_{j,k} \left\{ \frac{1}{2} \frac{(\lambda_j \lambda_k)^2}{\lambda_j^2 \lambda_k^2} - N_{j,k} \right\} \quad (4)$$

ここに、 $A_{j,k} = 1$, $\sum_{j=1}^{\infty} A_{j,k} = 1$, $A_{j,k} = \lambda_j^2 / [16(1-\nu^2)] A_{j,k}^*$, ($j \geq 3$), $\lambda_n = \sqrt{\rho R \omega_n^2 a^4 / D}$: 固有値, $\frac{1}{2} = 1/a$, a : 円板の半径, ω_n : n 次の線形固有円振動数, $M_{j,k} = (j-1)(j-1)(2j-3) / [(\lambda_j + \lambda_k)^2 (\lambda_j + \lambda_k - 3)]$, $N_{j,k} = (\lambda_j + \lambda_k)^2 X_{j,k} / (1-\nu^2)$; (a), $N_{j,k} = \lambda_j^2 + \lambda_k^2 - 2$; (b)

残された問題は時間関数 T_n を求めることにあるが、これを直接解くことは困難であるから Galerkin 法により近似解を求めることにする。板の規準関数に関する直交性、座標関数から $D \nabla^4 R_n = \rho R \omega_n^2 R_n$ なる関係および減衰項について直交性が成立するものと仮定すれば、次のような Duffing 形の非線形連立常微分方程式が求められる。

$$L_g(T_n) = \ddot{T}_n + 2\bar{\eta}_g \dot{T}_n + \bar{\eta}_g^2 T_n + \alpha_{g,n} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_j T_k T_n - \alpha_{g,n} \bar{p} \cos \Omega t = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに、} \bar{\eta}_g &= C_g / 2\rho R \omega_n; \text{減衰定数, } \alpha_{g,n} = \frac{6(1-\nu^2)}{\lambda_n^4} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{j,k} M_{j,k} (O_{j,k} R_n^2 + P_{j,k} S_{j,k}^* - N_{j,k} W^2), \quad (\alpha_{g,n} = \frac{12(1-\nu^2)}{\lambda_n^4} Y_g), \quad \bar{p} = \int_0^1 R_n^2 d\zeta, \\ R_n^2 &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \frac{(\lambda_n \lambda_k)^2}{\lambda_n^2 \lambda_k^2} \frac{dR_n}{d\zeta} R_n d\zeta \right\}, \quad S_{j,k}^* = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \frac{(\lambda_j \lambda_k)^2}{\lambda_j^2 \lambda_k^2} \frac{dR_n}{d\zeta} d\zeta \right\}, \quad W^2 = \int_0^1 \left\{ \frac{dR_n}{d\zeta} + \frac{d^2 R_n}{d\zeta^2} \right\} R_n d\zeta, \quad Y_g = \int_0^1 R_n^2 d\zeta, \quad \bar{p} = P a^4 / ER^4, \quad \alpha_{g,n} = \left(\frac{\omega_n}{\lambda_n} \right)^3, \\ R_n &= A^n \{ J_0(\lambda_n \zeta) - \frac{J_0(\lambda_n)}{J_0(\lambda_n)} I_0(\lambda_n \zeta) \}, \quad A^n = 1 / \{ J_0(\lambda_n) - \frac{J_0(\lambda_n)}{J_0(\lambda_n)} I_0(\lambda_n) \}, \quad J_0, I_0: \text{Bessel 関数} \end{aligned}$$

式(5)の厳密解を求めるのは不可能であるから、再び近似解法を適用しなければならないが、非線形項の大きな本題には調和バランス法が有効である。複素カベヤベツ次式にあることおよび減衰が存在することとを考慮すると、周期解を次のように仮定することができる。

$$T_g = \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} a_j^* \cos j\omega t + \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} b_j^* \sin j\omega t \quad (6) \quad \text{ここに、} a_j^*, b_j^*: \text{未定定数}$$

上式を式(5)に代入して、非線形項に含まれる正弦、余弦関数の積を加法定理を用いて展開したうえで、 $\cos, \sin$ の各調波の係数を比較すれば、未定定数 a_j^*, b_j^* を求めることができる。本題が解けることになる。なお、式(5)の形の微分方程式には 1 次の分數調波共振が存在することが知られており、これを求めるために T_g の解を式(6)にかえて次のように仮定し、以下同様の計算をくり返せばよい。

$$T_g = \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} a_j^* \cos \frac{j\omega t}{3} + \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} b_j^* \sin \frac{j\omega t}{3} \quad (7)$$

3. 計算例 ポアソン比 $\nu = 0.3$ なる円板を 3 自由度系に仮定すれば、式(5)は次のように書き改められる。

$$\ddot{w}_g + 2\zeta_g \dot{w}_g + \alpha_{11}^2 T_g + \alpha_{12}^2 T_g + \alpha_{13}^2 T_g + \alpha_{14}^2 T_g + \alpha_{15}^2 T_g + \alpha_{16}^2 T_g + \alpha_{17}^2 T_g + \alpha_{18}^2 T_g + \alpha_{19}^2 T_g + \alpha_{20}^2 T_g = \alpha_{21} \ddot{w} \cos \omega t \quad (8)$$

$$\text{時間関数 } T_g \text{ について, 4 項近似をとれば, } T_g = a_g \cos \omega t + b_g \cos 3\omega t + c_g \sin \omega t + d_g \sin 3\omega t, \quad g=1,2,3 \quad (9)$$

式(9)を式(8)に代入して, 調和バランス法を適用すると, a_g, b_g, c_g, d_g を決定するための 12 元連立非線形代数方程式が次のようにえられる。

$$\begin{aligned} (\alpha_g^2 - \bar{\omega}) a_g + 2\zeta_g \bar{\omega} c_g + \alpha_{11}^2 f_{11}^g + \alpha_{12}^2 f_{11}^g + \alpha_{13}^2 f_{11}^g + \alpha_{14}^2 f_{11}^g + \alpha_{15}^2 f_{11}^g + \alpha_{16}^2 f_{11}^g + \alpha_{17}^2 f_{11}^g + \alpha_{18}^2 f_{11}^g + \alpha_{19}^2 f_{11}^g + \alpha_{20}^2 f_{11}^g &= \alpha_{21} \bar{P} \\ (\alpha_g^2 - \bar{\omega}) b_g + 6\zeta_g \bar{\omega} d_g + \alpha_{11}^2 g_{11}^g + \alpha_{12}^2 g_{11}^g + \alpha_{13}^2 g_{11}^g + \alpha_{14}^2 g_{11}^g + \alpha_{15}^2 g_{11}^g + \alpha_{16}^2 g_{11}^g + \alpha_{17}^2 g_{11}^g + \alpha_{18}^2 g_{11}^g + \alpha_{19}^2 g_{11}^g + \alpha_{20}^2 g_{11}^g &= 0 \\ (\alpha_g^2 - \bar{\omega}) c_g - 2\zeta_g \bar{\omega} a_g + \alpha_{11}^2 f_{12}^g + \alpha_{12}^2 f_{12}^g + \alpha_{13}^2 f_{12}^g + \alpha_{14}^2 f_{12}^g + \alpha_{15}^2 f_{12}^g + \alpha_{16}^2 f_{12}^g + \alpha_{17}^2 f_{12}^g + \alpha_{18}^2 f_{12}^g + \alpha_{19}^2 f_{12}^g + \alpha_{20}^2 f_{12}^g &= 0 \\ (\alpha_g^2 - \bar{\omega}) d_g - 6\zeta_g \bar{\omega} b_g + \alpha_{11}^2 g_{12}^g + \alpha_{12}^2 g_{12}^g + \alpha_{13}^2 g_{12}^g + \alpha_{14}^2 g_{12}^g + \alpha_{15}^2 g_{12}^g + \alpha_{16}^2 g_{12}^g + \alpha_{17}^2 g_{12}^g + \alpha_{18}^2 g_{12}^g + \alpha_{19}^2 g_{12}^g + \alpha_{20}^2 g_{12}^g &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \alpha_g^2 &= 1, \quad f_{ijk} = \frac{1}{4} \{ 3a_i a_j a_k + a_i a_j b_k + a_i b_j a_k + b_i a_j a_k + 2(a_i b_j b_k + b_i a_j b_k + b_i b_j a_k) + a_i c_j c_k + c_i a_j c_k + c_i c_j a_k + a_i d_j d_k \\ &+ c_i a_j d_k + c_i d_j a_k + d_i a_j c_k + d_i c_j a_k + 2(a_i d_j d_k + d_i a_j d_k + d_i d_j a_k) - (b_i c_j c_k + c_i b_j c_k + c_i c_j b_k) \}, \quad g_{ijk} = \frac{1}{4} \{ a_i a_j a_k + 3b_i b_j b_k + 2(a_i b_j b_k \\ &+ a_i b_j a_k + b_i a_j a_k) - (a_i c_j c_k + c_i a_j c_k + c_i c_j a_k) + b_i d_j d_k + d_i b_j d_k + d_i d_j b_k + 2(b_i c_j c_k + c_i b_j c_k + c_i c_j b_k) \}, \quad p_{ijk} = \frac{1}{4} \{ -c_i c_j c_k + a_i a_j c_k \\ &+ a_i c_j a_k + c_i a_j a_k + a_i a_j d_k + a_i d_j a_k + a_i d_j a_k + 2(b_i b_j c_k + b_i c_j b_k + c_i b_j b_k) + 2(c_i d_j d_k + d_i c_j d_k + d_i d_j c_k) - (c_i c_j d_k + c_i d_j c_k + d_i c_j c_k) \\ &- (a_i b_j c_k + c_i a_j b_k + b_i a_j c_k + b_i c_j a_k + c_i a_j b_k + c_i b_j a_k) \}, \quad q_{ijk} = \frac{1}{4} \{ -c_i c_j c_k + 3d_i d_j d_k + a_i a_j c_k + a_i c_j a_k + c_i a_j a_k + 2(a_i d_j d_k + a_i d_j a_k \\ &+ d_i a_j a_k) + b_i b_j d_k + b_i d_j b_k + d_i b_j b_k + 2(c_i c_j d_k + c_i d_j c_k + d_i c_j c_k) \}, \quad g, i, j, k: 1, 2, 3 \end{aligned}$$

任意の振動数比 ω に対して Newton-Raphson 法のくり返し計算を用いて適当な初期値のもとに式(10)を解けば各自自由度の振幅成分を決定することはできる。これを用いて, 式(3)より任意時刻の円板の振幅および振動波形の時間的変動がえられる。振幅の定義として非減衰の場合には基本波の絶対値となる時刻の円板の中央点の無次元振幅を本題の振幅比として用いれば次のように与えられる。

$$A = \sqrt{\sum_{g=1}^3 (a_g^2 + b_g^2)} \quad (11)$$

また, 減衰がある場合には応答に位相差があるために, 最大振幅となる時刻を決定するのは容易でないから, 円板の中央点の時間波形の合成によって与えられる次式を用いた。

$$A = \sqrt{\sum_{g=1}^3 (a_g^2 + c_g^2)} + \sqrt{\sum_{g=1}^3 (b_g^2 + d_g^2)} \quad (12)$$

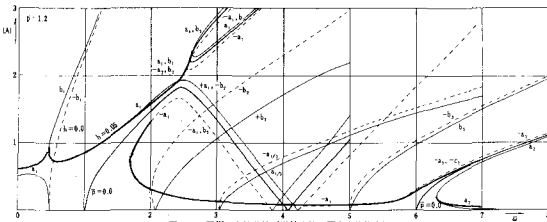


図-1 円板の応答曲線 (単純支持, 面内変位拘束)

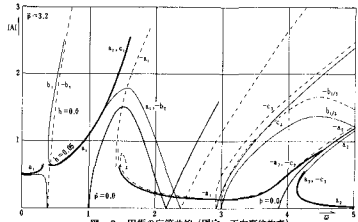


図-2 円板の応答曲線 (固定, 面内変位拘束)

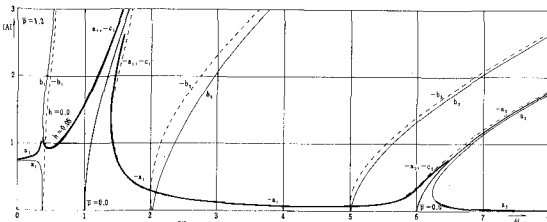


図-3 円板の応答曲線 (単純支持, 面内変位自由)

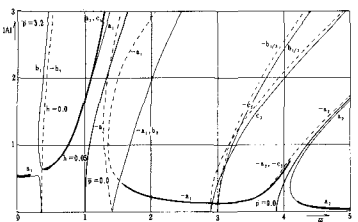


図-4 円板の応答曲線 (固定, 面内変位自由)

4 種数の境界条件をもつ円板の非線形定常強制振動に関して, 振動数比と振幅比との関係を求めれば, 図 4 の結果がえられる。図において細い実線は外力と同位相, 点線は外力と逆位相の非減衰強制振動の応答を示し, 肉太の実線は減衰を考慮した応答を示す。なお, 図中に付した記号 a_i, b_i などはどの次数の調波成分が卓越するかを示したものである。単純支持, 固定円板の面内変位拘束の場合には 1 次振動の基本波と 2 次振動の高調波が重畳するとともに応答は複雑な形となっていることがわかる。

参考文献 1) 高橋; 多自由度系解析法による円板の非線形自由振動, 長崎大学工学部研究報告, 第 5 号, S.49, 12