

長崎大学工学部 正員 高橋和雄

長崎大学工学部 学生員・井上真三

三菱重工

小西昭彦

1. 緒言 スパンが固定されるはりの振動問題においては振幅に依存する軸方向力が含まれるために、運動方程式は非線形となる。非線形項の比較的大きな本題に対する既往研究ははりも1自由度系に仮定した方法が多く用いられてきたが、無限自由度系である連続体と1自由度系として取り扱うことはきびしい仮定であり、場合によっては実情と離れた結果となりかねない。最近収束性の証明された調和バランス法を用いて、連続体と多自由度系として取り扱う多自由度系解析法が著手され、はりなどの連続体の厳密な現象把握が可能になりつつある¹⁾。筆者らは先に Galerkin 法を用いてはりも多自由度系として解析し、調和バランス法の収束性および差分法などによる結果と比較したが、引きつづき本論文は定常強制振動について主共振、分数、高調波、内部共振およびこれらに及ぼす減衰の影響について検討したものである。

2. 解法 細長比の大きなはりの低次振動を対象とすれば、回転慣性、せん断変形および有限変形の影響を無視することができるが、周期分布外力と受けるはりの粘性減衰振動の微分方程式は次のように与えられる。

$$L(x) = EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + PA \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + C \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{EA}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - p \cos \Omega t = 0 \quad (1)$$

ここに、 E : はりのヤング率、 I : 断面2次モーメント、 A : 断面積、 P : 単位体積あたりの質量、 C : 粘性抵抗係数、 L : スパン、 y : たわみ、 t : 時間、 p : 荷重強度、 Ω : 外力の円振動数

式(1)と解析的に解くために、はりのたわみと次のように時間と空間との変数分離形に仮定する。

$$y = r \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) \quad \text{ここに、} X_n(x): \text{座標関数、} T_n(t): \text{時間関数、} r: \text{回転半径} \quad (2)$$

上式の $X_n(x)$ としてはりの非減衰線形曲げ振動の規準関数を用いるものとするれば、規準関数に対する直交性 $\int_0^L X_n X_m dx = 0$ ($n \neq m$) および $EI \frac{d^4 X_n}{dx^4} = PA X_n$ なる関係、また減衰に対する $\int_0^L C X_n X_m dx = 0$ ($n \neq m$) なる仮定を考慮して、式(2)に Galerkin 法を用いれば、次のような時間に関する Duffing 形の連立非線形常微分方程式がえられる。

$$\ddot{T}_n + 2\lambda_n \dot{T}_n + \left(\frac{\omega_n}{r}\right)^2 T_n + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_{nlm}^n T_m T_l T_n - \beta_n \bar{p} \cos \omega t = 0 \quad (3)$$

ここに、 $\lambda_n = \frac{C}{2PA\omega}$; 減衰定数、 $A_{nlm}^n = -\frac{1}{2\lambda_n} \cdot \frac{1}{PA} \cdot \frac{1}{r} \int_0^L X_n^3 dx \cdot \int_0^L X_m X_l dx$ 、 $V_n = \int_0^L X_n^2 dx$ 、 $\beta_n = \frac{V_n}{V_n}$ 、 $Y_n = \int_0^L X_n dx$ 、 $\xi = \frac{t}{\tau}$ 、 $\tau = \omega_n t$ 、 $\bar{p} = pL^3/EI r$ 、 $\omega = \Omega/\omega_n$

非線形項がすべて3次式であることおよび減衰が存在することを考慮すると、式(3)の定常解を次のように Fourier 級数の形に仮定することができる。

$$T_n = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^n \cos m\omega\tau + b_m^n \sin m\omega\tau) \quad \text{ここに、} a_m^n, b_m^n: \text{未定定数} \quad (4)$$

式(4)を式(3)に代入して、 $\cos$, $\sin$ の各項の係数を等しくおき調和バランス法と適用すれば、 a_m^n , b_m^n に関する連立非線形代数方程式がえられる。これと与えられた振動数比 ω に対して適当な初期値のもとに、Newton-Raphson 法の繰返し計算を用いて解けば、未知数 a_m^n, b_m^n が求められる。

3. 計算例 はりを3自由度系と仮定すれば、式(3)から次のような運動方程式が求められる。

$$\begin{aligned} \ddot{T}_n + 2\lambda_n \dot{T}_n + \left(\frac{\omega_n}{r}\right)^2 T_n + \alpha_{111}^n T_1^3 + \alpha_{113}^n T_1 T_3 + \alpha_{115}^n T_1 T_5 + \alpha_{133}^n T_1 T_3^2 + \alpha_{135}^n T_1 T_3 T_5 + \alpha_{155}^n T_1 T_5^2 + \alpha_{333}^n T_3^3 + \alpha_{335}^n T_3^2 T_5 + \alpha_{555}^n T_5^3 \\ T_5^2 = \beta_n \bar{p} \cos \omega\tau \end{aligned} \quad (5)$$

時間 τ に対して第3高調波 ($\omega = 1, 3, 5$) まで採用すれば、 $T_n = \sum_{m=1}^3 (a_m^n \cos m\omega\tau + b_m^n \sin m\omega\tau + c_m^n \sin 2\omega\tau + d_m^n \sin 3\omega\tau + f_m^n \sin 5\omega\tau)$ (ただし)

$$\left. \begin{aligned} & a_n \left\{ \left(\frac{\omega_n}{r}\right)^2 - \omega^2 \right\} + 2\lambda_n a_n \omega + \alpha_{111}^n F_1^3 + \alpha_{113}^n F_1 F_3 + \alpha_{115}^n F_1 F_5 + \alpha_{133}^n F_1 F_3^2 + \alpha_{135}^n F_1 F_3 F_5 + \alpha_{155}^n F_1 F_5^2 + \alpha_{333}^n F_3^3 + \alpha_{335}^n F_3^2 F_5 + \alpha_{555}^n F_5^3 = \beta_n \bar{p} \\ & b_n \left\{ \left(\frac{\omega_n}{r}\right)^2 - \omega^2 \right\} + 6\lambda_n b_n \omega + \alpha_{111}^n G_1^3 + \alpha_{113}^n G_1 G_3 + \alpha_{115}^n G_1 G_5 + \alpha_{133}^n G_1 G_3^2 + \alpha_{135}^n G_1 G_3 G_5 + \alpha_{155}^n G_1 G_5^2 + \alpha_{333}^n G_3^3 + \alpha_{335}^n G_3^2 G_5 + \alpha_{555}^n G_5^3 = 0 \\ & c_n \left\{ \left(\frac{\omega_n}{r}\right)^2 - 25\omega^2 \right\} + 10\lambda_n c_n \omega + \alpha_{111}^n H_1^3 + \alpha_{113}^n H_1 H_3 + \alpha_{115}^n H_1 H_5 + \alpha_{133}^n H_1 H_3^2 + \alpha_{135}^n H_1 H_3 H_5 + \alpha_{155}^n H_1 H_5^2 + \alpha_{333}^n H_3^3 + \alpha_{335}^n H_3^2 H_5 + \alpha_{555}^n H_5^3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

上式から未知数 $Q_1, \dots, Q_n$ が求まると、任意の時刻におけるはりの動的応答がえられる。非減衰の場合の振幅は自由振動の場合と同様に ∞ の基本調波が最大となる $\omega t = n\pi$ ($n=0, 1, 2, \dots$) の時刻におけるはりの中央点の無次元変位を用いて次のように定義する。

次に減衰がある場合には位相差が存在するため、最大振幅を簡単に決定することは困難であるから、次のような合成振幅 A の最大値を用いるものとする。

$$i: i, \alpha = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^3 a_j^2\right) + \left(\sum_{j=1}^3 d_j^2\right)}, \beta = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^3 b_j^2\right) + \left(\sum_{j=1}^3 e_j^2\right)}, \gamma = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^3 m_j^2\right) + \left(\sum_{j=1}^3 n_j^2\right)}, \tan \varphi_1 = \frac{\sum_{j=1}^3 a_j / \sum_{j=1}^3 d_j, \tan \varphi_2 = \frac{\sum_{j=1}^3 b_j / \sum_{j=1}^3 e_j, \tan \varphi_3 = \frac{\sum_{j=1}^3 m_j / \sum_{j=1}^3 n_j}{\sum_{j=1}^3 m_j / \sum_{j=1}^3 n_j}$$

上述の振幅の定義は両者が必ずしも同じ結果を与えるとは限らないが、本論文ではこれらの定義を用いる。



参考文献 1) D. Burgreen: Free Vibrations of a Pin-Ended Column with Constant Distance between Pin Ends, JAM, Vol. 19

- 60 -