

長崎大学工学部 正員 高橋和雄
 長崎大学工学部 学生員。牛上真三
 三菱重工 小西昭彦

1. 緒言 スパンが固定されるはりの振動問題においては振幅に依存する軸方向力が含まれるために、運動方程式は非線形となる。非線形項の比較的大きな本題に対する既往研究ははりと 1 自由度系に仮定した方法が多く用いられてきたが、無限自由度系である連続体を 1 自由度系として取り扱うことはきびしい仮定であり、場合によっては実情と離れた結果となりかねない。最近収束性の証明された調和バランス法³⁾を用いて、連続体を多自由度系として取り扱う多自由度系解析法が着手され、はりなどの連続体の厳密な現象把握が可能になりつつある。⁴⁾筆者らは先に Galerkin 法を用いてはりと多自由度系として解析し、調和バランス法の収束性および差分法などによる結果と比較したが、引きつづき本論文は定常強制振動について主共振、分数、高調波、内部共振およびこれに反応する減衰の影響について検討したものである。

2. 解法 細長比の大きなはりの低次振動を対象とすれば、回転慣性、せん断変形および有限変形の影響を無視することができ、周期分布外力を受けけるはりの粘性減衰振動の微分方程式は次のようになります。

$$L(\ddot{x}) = EI \frac{d^2\ddot{x}}{dx^2} + PA \frac{d^2\ddot{x}}{dx^2} + C \frac{d\ddot{x}}{dx} - \frac{EA}{2L} \int_0^L (\frac{dx}{dt})^2 dx \frac{d^2\ddot{x}}{dx^2} - P \cos \Omega t = 0 \quad (1)$$

ここに、E：はりのヤング率、I：断面 2 次モーメント、A：断面積、P：単位体積あたりの質量、C：粘性抵抗係数、L：スパン、 \ddot{x} ：たわみ、t：時間、P：荷重強度、 Ω ：外力の円振動数

式(1)と解析的に解くために、はりのたわみを次のように時間と空間との変数分離形に仮定する。

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) T_i(t) \quad \text{ここに}, X_i(x) : 座標関数, T_i(t) : 時間関数, Y : 回転半径 \quad (2)$$

上式の $X_i(x)$ としてははりの非減衰線形曲げ振動の規準関数を用いるものとすれば、規準関数に対する直交性 $\int_0^L X_i(x) X_j(x) dx = 0$ ($i \neq j$) および $EI \frac{dX_i}{dx} = PA X_i$ なる関係、また減衰に対する $\int_0^L C X_i X_j dx = 0$ ($i \neq j$) なる仮定を考慮して、式(2)に Galerkin 法を用いれば、次のような時間に関する Duffing 形の連立非線形常微分方程式がえられる。

$$\ddot{T}_n + 2\alpha_n \dot{T}_n + \left(\frac{\omega_n}{\bar{\omega}}\right)^2 T_n + \frac{1}{EI} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_{n,l,m}^n T_n T_l T_m - \beta_n \bar{P} \cos \Omega t = 0 \quad (3)$$

ここに、 $\alpha_n = \frac{C}{2PA\bar{\omega}}$ ：減衰定数、 $A_{n,l,m}^n = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^L X_n' X_l' X_m' dx \cdot \int_0^L X_n'' X_m'' dx$ 、 $V_n = \int_0^L X_n' dx$ 、 $B_n = \frac{V_n}{\bar{\omega}}$ 、 $Y_n = \int_0^L X_n dx$ 、 $\bar{\omega} = \frac{\omega_n}{\sqrt{n}}$ 、 $\bar{P} = P \bar{\omega}^2 / EI Y_n$

非線形項がすべて 3 次式であることおよび減衰が存在することを考慮すると、式(3)の定常解を次のように Fourier 級数の形に仮定することができる。

$$T_n = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{nk}^0 \cos \bar{\omega} t + b_{nk}^0 \sin \bar{\omega} t) \quad \text{ここに}, a_{nk}^0, b_{nk}^0 : 未定常数 \quad (4)$$

式(4)を式(3)に代入して、 \cos, \sin の各項の係数を等しくおく調和バランス法を適用すれば、 a_{nk}^0, b_{nk}^0 に関する連立非線形代数方程式がえられる。これを与えられた振動数比に応じて適当な初期値のもとで、Newton-Raphson 法の繰返し計算を用いて解けば、未知数 a_{nk}^0, b_{nk}^0 が求められる。

3. 計算例 はりを 3 自由度系と仮定すれば、式(3)から次のような運動方程式が求められる。

$$\ddot{T}_1 + 2\alpha_1 \dot{T}_1 + \left(\frac{\omega_1}{\bar{\omega}}\right)^2 T_1 + \alpha_{111}^n T_1^3 + \alpha_{113}^n T_1^2 T_3 + \alpha_{115}^n T_1^2 T_5 + \alpha_{133}^n T_1 T_3^2 + \alpha_{135}^n T_1 T_3 T_5 + \alpha_{155}^n T_1 T_5^2 + \alpha_{333}^n T_3^3 + \alpha_{335}^n T_3^2 T_5 + \alpha_{355}^n T_3 T_5^2 = \beta_1 \bar{P} \quad (5)$$

時間 t に対して第 3 高調波 ($\omega = 1, 3, 5$) まで採用すれば、 $T_n = \sum_{k=0}^5 (a_{nk}^0 \cos \bar{\omega} t + b_{nk}^0 \sin \bar{\omega} t + c_{nk}^0 \cos 3\bar{\omega} t + d_{nk}^0 \sin 3\bar{\omega} t + e_{nk}^0 \cos 5\bar{\omega} t + f_{nk}^0 \sin 5\bar{\omega} t)$ これより

$$\begin{cases} \alpha_{111}^n \left(\left(\frac{\omega_1}{\bar{\omega}}\right)^2 - \alpha_1^2 \right) + 2\alpha_1 \alpha_1 \bar{\omega}^2 + \alpha_{111}^n F_1^2 + \alpha_{113}^n F_1^2 F_3 + \alpha_{115}^n F_1^2 F_5 + \alpha_{133}^n F_1 F_3^2 + \alpha_{135}^n F_1 F_3 F_5 + \alpha_{155}^n F_1 F_5^2 + \alpha_{333}^n F_3^3 + \alpha_{335}^n F_3^2 F_5 = \beta_1 \bar{P} \\ b_{11} \left\{ \left(\frac{\omega_1}{\bar{\omega}}\right)^2 - 9\bar{\omega}^2 \right\} + 6\alpha_1 \alpha_1 \bar{\omega}^2 + \alpha_{111}^n G_1^2 + \alpha_{113}^n G_1^2 G_3 + \alpha_{115}^n G_1^2 G_5 + \alpha_{133}^n G_1 G_3^2 + \alpha_{135}^n G_1 G_3 G_5 + \alpha_{155}^n G_1 G_5^2 + \alpha_{333}^n G_3^3 + \alpha_{335}^n G_3^2 G_5 + \alpha_{355}^n G_3 G_5^2 = 0 \\ c_{11} \left\{ \left(\frac{\omega_1}{\bar{\omega}}\right)^2 - 25\bar{\omega}^2 \right\} + 10\alpha_1 \alpha_1 \bar{\omega}^2 + \alpha_{111}^n H_1^2 + \alpha_{113}^n H_1^2 H_3 + \alpha_{115}^n H_1^2 H_5 + \alpha_{133}^n H_1 H_3^2 + \alpha_{135}^n H_1 H_3 H_5 + \alpha_{155}^n H_1 H_5^2 + \alpha_{333}^n H_3^2 H_5 + \alpha_{335}^n H_3 H_5^2 + \alpha_{355}^n H_5^3 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} d_n \left\{ \left(\frac{\omega_n}{\omega} \right)^2 - \omega^2 \right\} - 2 \chi_n Q_n \bar{\omega}^2 + \alpha_{111}^{nn} P_1^2 P_2 + \alpha_{113}^{nn} P_1^2 P_3 + \alpha_{131}^{nn} P_1 P_2 P_3 + \alpha_{133}^{nn} P_1 P_2 P_3 + \alpha_{311}^{nn} P_2^2 P_3 + \alpha_{313}^{nn} P_2^2 P_3 + \alpha_{331}^{nn} P_2 P_3^2 + \alpha_{333}^{nn} P_2 P_3^2 + \alpha_{111}^{nn} P_1^2 P_5 + \alpha_{113}^{nn} P_1^2 P_5 + \alpha_{131}^{nn} P_1 P_2 P_5 + \alpha_{133}^{nn} P_1 P_2 P_5 + \alpha_{311}^{nn} P_2^2 P_5 + \alpha_{313}^{nn} P_2^2 P_5 + \alpha_{331}^{nn} P_2 P_3 P_5 + \alpha_{333}^{nn} P_2 P_3 P_5 = 0 \\ C_n \left\{ \left(\frac{\omega_n}{\omega} \right)^2 - \omega^2 \right\} - 6 \chi_n b_n \bar{\omega}^2 + \alpha_{111}^{nn} Q_1^2 Q_2 + \alpha_{113}^{nn} Q_1^2 Q_3 + \alpha_{131}^{nn} Q_1 Q_2 Q_3 + \alpha_{133}^{nn} Q_1 Q_2 Q_3 + \alpha_{311}^{nn} Q_2^2 Q_3 + \alpha_{313}^{nn} Q_2^2 Q_3 + \alpha_{331}^{nn} Q_2 Q_3^2 + \alpha_{333}^{nn} Q_2 Q_3^2 + \alpha_{111}^{nn} Q_1^2 Q_5 + \alpha_{113}^{nn} Q_1^2 Q_5 + \alpha_{131}^{nn} Q_1 Q_2 Q_5 + \alpha_{133}^{nn} Q_1 Q_2 Q_5 + \alpha_{311}^{nn} Q_2^2 Q_5 + \alpha_{313}^{nn} Q_2^2 Q_5 + \alpha_{331}^{nn} Q_2 Q_3 Q_5 + \alpha_{333}^{nn} Q_2 Q_3 Q_5 = 0 \\ f_n \left\{ \left(\frac{\omega_n}{\omega} \right)^2 - \omega^2 \right\} - 10 \chi_n C_n \bar{\omega}^2 + \alpha_{111}^{nn} R_1^3 + \alpha_{113}^{nn} R_1^3 R_3 + \alpha_{131}^{nn} R_1^3 R_5 + \alpha_{133}^{nn} R_1 R_3^2 + \alpha_{311}^{nn} R_2^3 + \alpha_{313}^{nn} R_2^3 R_3 + \alpha_{331}^{nn} R_2 R_3^2 + \alpha_{333}^{nn} R_2 R_3^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

上式から未知数 $Q_n \sim f_n$ が求まる。任意の時刻におけるはりの動的応答がえられる。非減衰の場合の振幅は自由振動の場合と同様に \cos の基本調波が最大となるので $= n\pi$ ($n=0, 1, 2, \dots$) の時刻におけるはりの中央点の無次元位変を用いて次のようく定義する。

$$A_n = \sum_{m=1}^M (a_m + b_m + c_m) \quad (7)$$

次に減衰がある場合には位相差が存在するため、最大振幅を簡単に決定することは困難であるから、次のよきな合成振幅 A_2 の最大値を用いるものとする。

$$A_2 = \left\{ \alpha^2 + \beta^2 + \omega^2 + 2\alpha\beta \cos(2\bar{\omega}\tau + \varphi_2 - \varphi_1) + 2\beta\omega \cos(2\bar{\omega}\tau - \varphi_2 + \varphi_3) + 2\beta\omega \cos(4\bar{\omega}\tau + \varphi_3 - \varphi_1) \right\}^{1/2} \quad (8)$$

$$\text{ここで}, \alpha = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^M a_n\right)^2 + \left(\sum_{n=1}^M b_n\right)^2}, \beta = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^M c_n\right)^2 + \left(\sum_{n=1}^M f_n\right)^2}, \tan \varphi_1 = \frac{\sum_{n=1}^M a_n}{\sum_{n=1}^M b_n}, \tan \varphi_2 = \frac{\sum_{n=1}^M b_n}{\sum_{n=1}^M c_n}, \tan \varphi_3 = \frac{\sum_{n=1}^M c_n}{\sum_{n=1}^M f_n}$$

上述の振幅の定義は両者が必ずしも同じ結果を与えるとは限らないが、本論文ではこれらの定義を用いる。

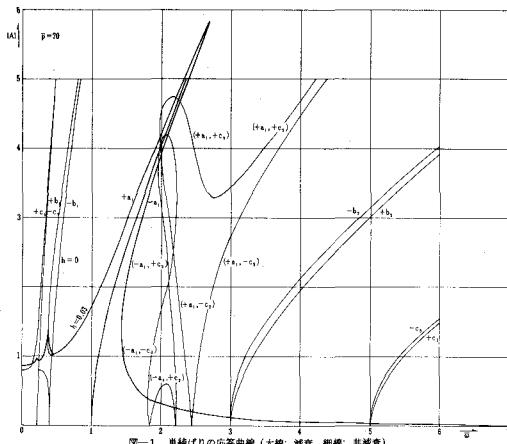


図-1 単純ばかりの応答曲線（太線：減衰、細線：非減衰）

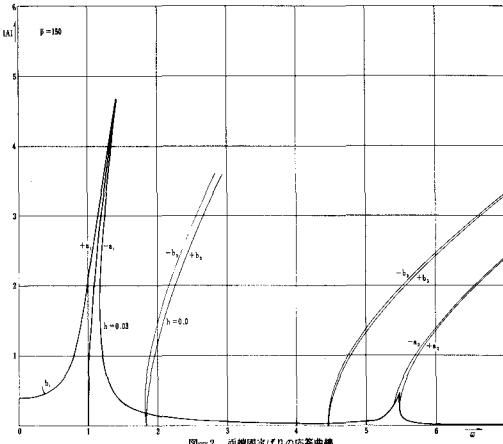


図-2 固定端ばかりの応答曲線

両端ヒンジばかりと両端固定ばかりについて応答曲線を求めれば図-1, 2に示す結果である。図において振動数比が1.0付近の応答は1次振動の主共振で、また、0.2付近は1次振動の5倍、0.3付近は1次振動の3倍の高調波共振を示す。これらは加振周波数を変化させると連続的に移行することがわかる。3.0および5.0付近の共振はそれぞれ2次振動の3倍の高調波共振、3次振動の5倍の高調波共振を示し、これらは分岐的に生ずることが予想される。2.0付近の共振は主共振と2次振動の5倍の高調波共振が連成するため複雑な応答となる。減衰力が作用すると振幅は共振点で有限で、応答曲線は閉じることになる。連続的に生ずる1次振動の主および高調波共振は減衰がある場合にも生ずることがわかるが、分岐および連成によって生ずる共振は現在のところまだえられていない。図-2の固定ばかりについても同様の傾向を示すといえる。なお減衰力が作用する場合の分岐的な共振および連成による共振、また分数調波共振については講演時に発表する。また、非減衰、減衰のいずれの場合にも適用できる振幅の定義法として実効値を用いることを検討中である。

参考文献 ① D. Burgreen; Free Vibrations of a Pin-Ended Column with Constant Distance between Pin Ends, JAM, Vol. 19, 1952, PP. 135~139, ② 佐藤；両端固定よりおよび一端固定、他端単純なりの非線形自由振動、日本機械学会論文集、第34巻、第259号、昭和43年3月、PP. 418~426, ③ 郡部寛；たとえば非線形振動の解析法—重子通信学会誌、Vol. 36, No. 9, 昭和48年9月、PP. 1266~1271, ④ J.A. Bennett & J.G. Eisley; A Multiple Degree-of-Freedom Approach to Nonlinear Beam Vibrations, AIAA J., Vol. 8, No. 4, 1970, PP. 734~739, ⑤ 高橋；はりの非線形振動、第24回応用力学連合講演論文抄録集、1979. 11. PP. 142~142