II－7　　多自由度系解析法による片持ばりの非線形振動

長崎大学工学部　正員　高橋和雄
長崎大学工学部　学生員○鬼塚正晴
長崎大学工学部　　伊藤　修

1.緒言　はりの非線形振動に関する研究においては，軸力による非線形項が多く取り扱われてきたが，片持ばりや両端自由ばりでは有限変形の影響による非線形項を考慮しなければならない。有限変形による非線形項は軸力による項に比較して小さい。このため本問題に対する解析法は摂動法などの微小パラメーター法が用いられてきた[1)~2)]。しかしながら，有限変形に伴なう振動波形や振動時の応力分布，周期外力が作用する場合の応答特性が解明されていない。本研究ははりの有限変形に関する植村，吉村の基礎式[3)]を簡略化した運動方程式に基づき，はりをGalerkin法を用いて多自由度系として解析したものである。

2.解法　ベクトルのひずみの解析によると直線ばりのひずみ ε および曲率 K が次のように与えられる。

$$1+\varepsilon=\left\{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (1) \qquad K=\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial x}\right\}\Big/\left\{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

ここに，u；はりの軸方向変位，y；はりのたわみ，x；スパン方向の座標

平面保持の法則の成り立つはりの微小要素の変形後の位置における垂直断面に作用する全応力ベクトルを $\mathbb{T}$，外力のベクトルを $\mathbb{X}$，はりの単位体積当りの質量を ρ とすれば，並進運動に関する方程式は次式となる。

$$\frac{\partial \mathbb{T}}{\partial x}+\mathbb{X}-\rho A\frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial t^2}=0 \qquad (3)$$

ここに，A；はりの断面積，$\mathbb{U}$；変位ベクトル，t；時間

次に応力による偶力を $\mathbb{M}$，外力のモーメントを $\mathbb{G}$，中立軸に対する陪法線の単位ベクトルを $\mathbb{b}$，体積要素片 Adx の回転慣性によるモーメントを $d\mathbb{H}$ とすれば，微小要素のモーメントの釣合式は次のように表わされる。

$$d\mathbb{M}\mathbb{b}+[d\mathbb{r}\times\mathbb{T}]+\mathbb{G}dx\mathbb{b}=d\mathbb{H}\mathbb{b} \qquad (4)$$

式(3)を変形後の断面の法線および接線方向単位ベクトルの方向の運動方程式に書きなおし，かつ式(4)と組み合わせると，次のような運動方程式が求められる。

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\rho I}{A}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x\partial t^2}-\frac{\partial G}{\partial x}+(1+\varepsilon)TK+\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial y/\partial x}{1+\partial u/\partial x}+\left(\frac{\partial M}{\partial x}+G-\frac{\rho I}{A}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)K\frac{\partial y}{\partial x}\frac{1+\varepsilon}{1+\partial u/\partial x}+\left(Z-\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{(\partial y/\partial x)^2}{1+\partial u/\partial x}\right)\frac{1}{1+\varepsilon}=0$$

ここに，$\varphi=\sin^{-1}\left(\frac{\partial y/\partial x}{1+\varepsilon}\right)$，$I$；断面極2次モーメント，$Z$；外力の法線方向成分　(5)

Hookeの法則が成り立つ微小歪を仮定すると，モーメントを M，軸力を T とすれば，これらは次式で表わされる。

$$M=EIK \qquad T=EA\varepsilon \qquad (6)$$

いま，細長比の大きなはりを対象とすれば，回転慣性の影響は無視することができる。また片持ばりでは軸方向の変位は拘束されていないから，軸方向ひずみ $\varepsilon=0$，従って $T=0$ とおくことができ，外力として回転力が作用しない場合には，式(5)は次のように書き改められる。

$$\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+EI\left[\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\left\{2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3\right\}\Big/\sqrt{1-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\right]=p(x,t) \qquad (7)$$

たわみの3乗の項まで非線形項を採用し，外力として等分布の周期外力 $p_0\cos\Omega t$ が作用する場合を対象とすれば本題の運動方程式が次のように求められる。

$$\mathcal{L}(y)=\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+EI\left\{\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3\right\}-p_0\cos\Omega t=0 \qquad (8)$$

ここに，Ω；外力の円振動数

上式は曲げ剛性が一様なはりの幾何学的に任意な振幅をもつ場合に対して成立するWagner[1)]の方程式の第1近似式に対応する。

式(8)を解くために，はりのたわみを次のように変数分離形に仮定する。

$$y=\sum_{i=1}^{\infty}X_i(x)T_i(t) \qquad (9)$$

ここに，l；スパン長，$X_i(x)$；座標関数，$T_i(t)$；時間関数

解法を簡単にするため $\xi=x/l$，$\tau=\omega_1 t$（ω_1；線形1次固有円振動数），$\bar{y}=y/l$ とおき式(8)および(9)を無次元化し，

式(9)の座標関数として次式のような片持ばりの非減衰線形曲げ振動の規準関数を用いるものとする。

$X_i(\xi)=\frac{1}{2}(1-\alpha_i)e^{\lambda_i\xi}+\frac{1}{2}(1+\alpha_i)e^{-\lambda_i\xi}-\cos\lambda_i\xi+\alpha_i\sin\lambda_i\xi$ (10) ここに，$\alpha_i=(\cosh\lambda_i+\cos\lambda_i)/(\sinh\lambda_i+\sin\lambda_i)$

λ_i，α_i は CDC6600計算機の倍精度演算によるものを用いることにする。

式(9)を式(8)に代入し，$\rho A\omega_i^2 X_i=EI\frac{d^4X_i}{d\lambda_i^4}$（ここに，$\omega_i$；$i$次の固有円振動数）なる関係を用いれば次式がえられる

$$\mathcal{L}(y)=\sum_{i=1}^{\infty}(\ddot{T}_i+\frac{\lambda_i^4}{\lambda_1^4}T_i)X_i+\frac{1}{\lambda_1^4}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}T_kT_lT_m\left(2\frac{dX_k}{d\xi}\frac{d^2X_l}{d\xi^2}\frac{d^3X_m}{d\xi^3}+\frac{d^2X_k}{d\xi^2}\frac{d^2X_l}{d\xi^2}\frac{d^2X_m}{d\xi^2}\right)-\frac{\bar{P}}{\lambda_1^4}\cos\bar{\omega}\tau \qquad (11)$$

ここに，$\bar{P}=P_0l^3/EI$，$\lambda_i=l(\rho A\omega_i^2/EI)^{\frac{1}{4}}$，$\bar{\omega}=\Omega/\omega_1$

上式の右辺は零にならないので Galerkin 法を用いることにする。すなわち，$\int_0^1\mathcal{L}(y)X_id\xi=0$ (12) ここに，$i=1,2,\cdots$；また規準関数の直交性を考慮すれば，次のような T_n に関する連立非線形微分方程式がえられる。

$$\ddot{T}_n+\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^4T_n+\alpha_n\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nklm}T_kT_lT_m=\beta_n\bar{P}\cos\bar{\omega}\tau \qquad (13)$$

ここに，$\delta_n=\int_0^1X_n^2d\xi$，$\alpha_n=\frac{1}{\lambda_1^4}\frac{1}{\delta_n}$

$A_{nklm}=\int_0^1\left(2\frac{dX_k}{d\xi}\frac{d^2X_l}{d\xi^2}\frac{d^3X_m}{d\xi^3}+\frac{d^2X_k}{d\xi^2}\frac{d^2X_l}{d\xi^2}\frac{d^2X_m}{d\xi^2}\right)X_nd\xi$，$\beta_n=\int_0^1X_nd\xi/\lambda_1^4\delta_n$

式(13)の周期解をえるために，復元力がすべて3次式であること，および減衰のないことを考慮して T_n を次のような Fourier 級数の形に仮定する。

$$T_n=\sum_{f=1,3}^{\infty}b_f^n\cos f\bar{\omega}\tau \qquad (14)$$

式(14)を式(13)に代入して，cosの各項の係数を調和バランス法で解けば，b_f^n に関する非線形連立代数方程式がえられる。これを *Newton-Raphson* 法で解けば，未知数 b_f^n が求まり，本題が解けたことになる。

3．計算例　はりを3自由度系と仮定すれば，次のような非線形連立微分方程式がえられる。

$$\ddot{T}_n+\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^4T_n+\alpha_{111}^nT_1^3+\alpha_{113}^nT_1^2T_3+\alpha_{115}^nT_1^2T_5+\alpha_{133}^nT_1T_3^2+\alpha_{135}^nT_1T_3T_5+\alpha_{155}^nT_1T_5^2+\alpha_{333}^nT_3^3+\alpha_{335}^nT_3^2T_5+\alpha_{355}^nT_3T_5^2+\alpha_{555}^nT_5^3=\beta_n\bar{P}\cos\bar{\omega}\tau \qquad (15)$$

ここに，$\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^4$，$\alpha_{111}^n$，$\alpha_{113}^n$，……，$\alpha_{555}^n$；表-1参照　$n=1,2,3$

n	ω_n/ω_1	α_{111}^n	α_{113}^n	α_{115}^n	α_{133}^n	α_{135}^n	α_{155}^n	α_{333}^n	α_{335}^n	α_{355}^n	α_{555}^n	β_n
1	1.0000	-0.4089	$-0.4804_{10^{1}}$	$0.1722_{10^{1}}$	$-0.4389_{10^{2}}$	$-0.1188_{10^{3}}$	$-0.4062_{10^{2}}$	$-0.3117_{10^{3}}$	$-0.6301_{10^{3}}$	$-0.3545_{10^{3}}$	$-0.1423_{10^{3}}$	0.1267
2	6.2669	0.6660	$-0.6358_{10^{1}}$	$-2.7649_{10^{1}}$	$-0.4744_{10^{2}}$	$-0.4155_{10^{3}}$	$-1.3568_{10^{2}}$	$-0.6947_{10^{3}}$	$-2.4264_{10^{3}}$	$-0.5486_{10^{2}}$	$-0.9030_{10^{3}}$	-0.0702
3	$1.7545_{10^{1}}$	0.0082	$2.3279_{10^{1}}$	$-1.6078_{10^{1}}$	$0.7481_{10^{2}}$	$-0.1070_{10^{3}}$	$0.4438_{10^{2}}$	$-0.6899_{10^{3}}$	$-1.2750_{10^{3}}$	$-0.1409_{10^{2}}$	$-2.6731_{10^{3}}$	0.0412

表-1　式(15)の係数 ω_n/ω_1，α_{111}^n，α_{113}^n，……，β_n

時間関数 T_n について，第4高調波まで採用すると，次のように表わされる。

$$T_n=a_n\cos\bar{\omega}\tau+b_n\cos3\bar{\omega}\tau+c_n\cos5\bar{\omega}\tau+d_n\cos7\bar{\omega}\tau \qquad (16)$$

式(16)を式(15)に代入して $\cos9\bar{\omega}\tau$ 以上の高調波成分を無視して，$\cos\bar{\omega}\tau$，$\cos3\bar{\omega}\tau$，$\cos5\bar{\omega}\tau$，$\cos7\bar{\omega}\tau$ の各項の係数を比較すると，次のような12元非線形連立代数方程式がえられる。

$$\left\{\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^4-\bar{\omega}^2\right\}a_n+\alpha_{111}^nf_{111}^n+\alpha_{113}^nf_{113}^n+\alpha_{115}^nf_{115}^n+\alpha_{133}^nf_{133}^n+\alpha_{135}^nf_{135}^n+\alpha_{155}^nf_{155}^n+\alpha_{333}^nf_{333}^n+\alpha_{335}^nf_{335}^n+\alpha_{355}^nf_{355}^n+\alpha_{555}^nf_{555}^n=\beta_n\bar{P}$$

$$\left\{\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^4-3^2\bar{\omega}^2\right\}b_n+\alpha_{111}^ng_{111}^n+\alpha_{113}^ng_{113}^n+\alpha_{115}^ng_{115}^n+\alpha_{133}^ng_{133}^n+\alpha_{135}^ng_{135}^n+\alpha_{155}^ng_{155}^n+\alpha_{333}^ng_{333}^n+\alpha_{335}^ng_{335}^n+\alpha_{355}^ng_{355}^n+\alpha_{555}^ng_{555}^n=0 \qquad (17)$$

$$\left\{\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^4-5^2\bar{\omega}^2\right\}c_n+\alpha_{111}^nh_{111}^n+\alpha_{113}^nh_{113}^n+\alpha_{115}^nh_{115}^n+\alpha_{133}^nh_{133}^n+\alpha_{135}^nh_{135}^n+\alpha_{155}^nh_{155}^n+\alpha_{333}^nh_{333}^n+\alpha_{335}^nh_{335}^n+\alpha_{355}^nh_{355}^n+\alpha_{555}^nh_{555}^n=0$$

$$\left\{\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^4-7^2\bar{\omega}^2\right\}d_n+\alpha_{111}^n\ell_{111}^n+\alpha_{113}^n\ell_{113}^n+\alpha_{115}^n\ell_{115}^n+\alpha_{133}^n\ell_{133}^n+\alpha_{135}^n\ell_{135}^n+\alpha_{155}^n\ell_{155}^n+\alpha_{333}^n\ell_{333}^n+\alpha_{335}^n\ell_{335}^n+\alpha_{355}^n\ell_{355}^n+\alpha_{555}^n\ell_{555}^n=0$$

ここに，$f_{ijk}=0.25\{3a_ia_ja_k+(a_ia_jb_k+a_ib_ja_k+b_ia_ja_k)+2(a_ib_jb_k+b_ia_jb_k+b_ib_ja_k)+(b_ib_jc_k+b_ic_jb_k+c_ib_jb_k)+(b_ib_jd_k+b_id_jb_k+d_ib_jb_k)+2(c_ic_ja_k+c_ia_jc_k+a_ic_jc_k)+2(d_id_ja_k+d_ia_jd_k+a_id_jd_k)+(a_ib_jc_k+a_ic_jb_k+b_ia_jc_k+b_ic_ja_k+c_ia_jb_k+c_ib_ja_k)+(a_ic_jd_k+a_id_jc_k+c_ia_jd_k+c_id_ja_k+d_ia_jc_k+d_ic_ja_k)+(b_ic_jd_k+b_id_jc_k+c_ib_jd_k+c_id_jb_k+d_ib_jc_k+d_ic_jb_k)\}$

$g_{ijk}=0.25\{a_ia_ja_k+3b_ib_jb_k+2(a_ia_jb_k+a_ib_ja_k+b_ia_ja_k)+(a_ia_jc_k+a_ic_ja_k+c_ia_ja_k)+2(c_ic_jb_k+c_ib_jc_k+b_ic_jc_k)+(c_ic_jd_k+c_id_jc_k+d_ic_jc_k)+2(b_id_jd_k+d_ib_jd_k+d_id_jb_k)+(a_ib_jc_k+a_ic_jb_k+b_ia_jc_k+b_ic_ja_k+c_ia_jb_k+c_ib_ja_k)+(a_ib_jd_k+a_id_jb_k+b_ia_jd_k+b_id_ja_k+d_ia_jb_k+d_ib_ja_k)+(a_ic_jd_k+a_id_jc_k+c_ia_jd_k+c_id_ja_k+d_ia_jc_k+d_ic_ja_k)\}$，$h_{ijk}=0.25\{3c_ic_jc_k+(a_ia_jb_k+a_ib_ja_k+b_ia_ja_k)+2(a_ia_jc_k+a_ic_ja_k+c_ia_ja_k)+(a_ia_jd_k+a_id_ja_k+d_ia_ja_k)+(b_ib_ja_k+b_ia_jb_k+a_ib_jb_k)+2(b_ib_jc_k+b_ic_jb_k+c_ib_jb_k)+2(d_id_jc_k+d_ic_jd_k+c_id_jd_k)+(a_ib_jd_k+a_id_jb_k+b_ia_jd_k+b_id_ja_k+d_ia_jb_k+d_ib_ja_k)+(b_ic_jd_k+b_id_jc_k+c_ib_jd_k+c_id_jb_k+d_ib_jc_k+d_ic_jb_k)\}$，$\ell_{ijk}=0.25\{3d_id_jd_k+(a_ia_jc_k+a_ic_ja_k+c_ia_ja_k)+2(a_ia_jd_k+a_id_ja_k+d_ia_ja_k)+(b_ib_ja_k+b_ia_jb_k+a_ib_jb_k)+2(b_ib_jd_k+b_id_jb_k+d_ib_jb_k)+(c_ic_jb_k+c_ib_jc_k+b_ic_jc_k)+2(c_ic_jd_k+c_id_jc_k+d_ic_jc_k)+(a_ib_jc_k+a_ic_jb_k+b_ia_jc_k+b_ic_ja_k+c_ia_jb_k+c_ib_ja_k)\}$，　$n=1,2,3$

式(17)を解けば，式(16)から時間関数 T_n が，また式(9)から任意時間におけるはりの振動波形の時間的変動がえられる。基本調波の振幅の絶対値が最大となる $\bar{\omega}\tau=n\pi$（$n=0,1,2,\cdots$）の時刻における片持ばり自由端の無次元変位

を本題の振幅比として定義すれば次のように表わされる。

$$c/l=\sum_{i=1,3}^{3}(a_i+b_i+c_i+d_i) \quad (18)$$

外力 $\bar{p}$ が零である非線形自由振動について，1次振動の振動数比 $\bar{\omega}$ と振幅比 c/l との関係を求めれば，表-2 に示すようにえられる。有限変形による非線形項は表-1 に示すように α_{111}^{1} が負号をもつ軟化バネと同様の挙動を示すために，振幅比の増大にともなって振動数比が減少することになる。表-3は振幅の増加にともなう振動波形の変動をはり先端の変位を1に規準化して求めたものである。振幅比の増大とともにはりの振動波形は理想的な微小変形(c/l=0)からずれていくことがわかる。1自由度の場合と比較するために，式(15)において連成項を無視し，1次振動のみに注目すれば，次のような非線形常微分方程式がえられる。

c/l	本法	1自由度
0.0	1.0000	1.0000
0.1	0.9985	0.9985
0.2	0.9939	0.9939
0.3	0.9862	0.9861
0.4	0.9756	0.9752
0.5	0.9620	0.9610

表-2 片持ばりの振動数比

ξ \ c/l	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.1	0.01677	0.01679	0.01686	0.01696	0.01712	0.01733
0.2	0.06387	0.06394	0.06415	0.06450	0.06501	0.06570
0.3	0.13648	0.13661	0.13699	0.13762	0.13854	0.13978
0.4	0.22988	0.23006	0.23058	0.23145	0.23270	0.23438
0.5	0.33952	0.33973	0.34032	0.34132	0.34275	0.34464
0.6	0.46113	0.46134	0.46193	0.46292	0.46433	0.46619
0.7	0.59088	0.59104	0.59156	0.59241	0.59362	0.59520
0.8	0.72548	0.72560	0.72597	0.72659	0.72745	0.72858
0.9	0.86240	0.86246	0.86266	0.86297	0.86342	0.86400
1.0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

表-3 振幅に伴なう振動波形の変動

$$\bar{\omega}^2\frac{d^2T}{d\tau^2}+T+\alpha_{111}^{1}\left(\frac{c}{l}\right)^2T^3=0 \quad (19)$$

上式を解くために，$\bar{\omega}$, T を次のように $\bar{\varepsilon}=c/l$ のべき級数に仮定する。

$$T=T_0+T_1\bar{\varepsilon}+T_2\bar{\varepsilon}^2+T_3\bar{\varepsilon}^3+\cdots \qquad \bar{\omega}=\bar{\omega}_0+\bar{\varepsilon}\bar{\omega}_1+\bar{\varepsilon}^2\bar{\omega}_2+\bar{\varepsilon}^3\bar{\omega}_3+\cdots$$

とおいて，$\bar{\omega}_0=1$, $T_0=\cos\bar{\omega}_0\tau$ とおいて解けば本題の振動数比 ω が次のようにえられる。

$$\bar{\omega}=1-0.15334\left(c/l\right)^2-0.00980\left(c/l\right)^4-0.00198\left(c/l\right)^6 \quad (20)$$

上式の結果を求めれば，表-2 に付記するとおりで，c/l=0.3 までは多自由度の解と1自由度の解が合致するが，c/l が 0.4 以上となると若干両者の差が離れてくるが，振動数に及ぼす振動波形の変動波形は小さいことがわかる。図-1は荷重強度，$\bar{p}$=0.1, 0.2, 0.8 の場合について，振動数比と振幅比の関係をプロットしたものである。写真-1は水平テーブルにジュラルミン製のはり（$E=0.75\times10^6$ kg/cm², はり高さ：1mm，幅：2cm，長さ：28cm，単位体積重量 $w=2.85\times10^{-3}$ kg/cm³）を載せて，慣性力による周期外力で加振し，共振時の波形を示したものである。

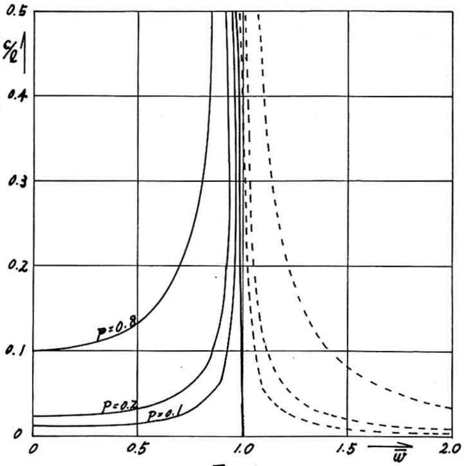

図-1

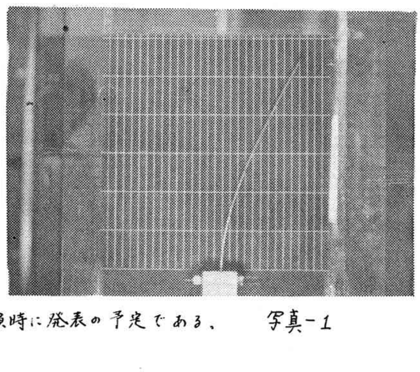
写真-1

4 結語　共振時の曲げ応力の分布，理論と実験との比較，2次振動近傍の非線形振動特性および減衰の影響については講演時に発表の予定である。

参考文献　1) Wagner ; Large Amplitude Free Vibration of a Beam, J. Appl. Mech, Vol.32, PP.887~892, (1965),　2) 加藤 ; 片持ばりの大たわみ振動, 日本機械学会論文集, Vol.34, No.257, PP67~72 (1968.3),　3) 吉村・植村 ; 棒の横振動における振幅の影響, 東京大学理工学研究所報告, 第2巻 第3.4号, (1948,3,4),　4) Chang　R. R. Craig ; Normal Modes of Uniform Beam, Pro. ASCE, Vol. 94　EM4, PP. 1027 ~1031 (1968, 8).