II－5　　非定常不規則外力を受ける1自由度系の応答　（2）

（　形状関数が任意の関数の場合　）

長崎大学　工学部　正員　　岡林　隆敏

〃　　学生員　○中富　素六

〃　　学生員　杣　辰雄

1．はじめに

才1報で述べたように，非定常外力をその包絡線を表わす形状関数と定常確率過程の積と考えた場合の1自由度系の二乗平均応答は，共分散方程式を数値解析することにより容易に求めることができる。本文においては，指数関数で表わされる形状関数と，ある相関関数を持つ定常確率過程の積で表わされる外力が1自由度系に作用した場合，1自由度の二乗平均応答について，従来の積分による厳密解と共分散方程式による数値との比較を行った。さらに，実際の非定常不規則外力が1自由度系に作用したとき，その二乗平均応答を共分散方程式を用いて計算する手法を示した。

2．形状関数が指数関数で表わされる場合の二乗平均応答

1自由度系の振動を表わす方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{x}(t) + 2\rho\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t) \tag{1}$$

ただし，ρ；減衰定数，ω；固有円振動数，$f(t)$；外力を表わす非定常確率過程であり，(2)式で示される自己相関関数$R_z(\tau)$を持つ定常確率過程$z(t)$と(3)式で示される確定関数である形状関数$g(t)$との積である。

$$R_z(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}\cos\Omega\tau \tag{2}$$

$$g(t) = e^{-\gamma t} \tag{3}$$

$z(t)$はフィルター系に白色雑音が作用したときの応答の定常解として得ることができて，そのような系は次の微分方程式で記述される。

$$z(t) = \sqrt{2\beta}\left((\beta^2+\Omega^2)^{1/2} y(t) - \dot{y}(t)\right) \tag{4-1}$$

$$\ddot{y}(t) + 2\beta\dot{y}(t) + (\Omega^2+\beta^2)y(t) = n(t) \tag{4-2}$$

ただし，$n(t)$；σ^2の分散を持つ白色雑音。(1)，(3)，(4)を状態空間でベクトル表示すれば次式を得る。

$$\dot{\mathbb{X}}(t) = \mathbb{A}(t)\cdot\mathbb{X}(t) + \mathbb{D}\cdot\mathbb{V}(t) \tag{5}$$

ただし，$\mathbb{X}(t) = \{x, \dot{x}, y, \dot{y}\}^T = \{x_1, x_2, y_1, y_2\}^T$

$$\mathbb{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_1 & -a_2 & dc_1 & -dc_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b_1 & -b_2 \end{bmatrix} \quad \mathbb{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{V}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ n(t) \end{bmatrix}$$

ただし，$a_1 = \omega^2$，$a_2 = 2\rho\omega$，$b_1 = (\Omega^2+\beta^2)$，$b_2 = 2\beta$，$c_1 = (b_1 b_2)^{1/2}$，$c_2 = b_2^{1/2}$，$d = g(t)$

従って，(5)式に対応する共分散方程式は次式になる。

$$\dot{\mathbb{R}}(t) = \mathbb{A}(t)\cdot\mathbb{R}(t) + \mathbb{R}(t)\mathbb{A}^T(t) + \mathbb{Q} \tag{6}$$

ただし，$\mathbb{R}(t) = E[\mathbb{X}\cdot\mathbb{X}^T]$，$E[\ ]$は集合平均，$\mathbb{Q}$は次式で示される(4×4)の行列，

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

次にフィルター系について考えると，フィルター系の方程式は(4)式であり，フィルター系の応答は定常状態であるので(4-2)式に対応する共分散方程式は次の代数方程式になる。

$$\mathbb{A}_f\mathbb{R}_f + \mathbb{R}_f\mathbb{A}_f + \mathbb{Q}_f = \mathbb{O} \tag{7}$$

従って，(3)，(6)，(7)式より次の微分方程式が得られる。

$$
\left.
\begin{aligned}
&\dot{E}[x_1^2] = 2E[x_1x_2] \qquad \dot{E}[x_1x_2] = -a_1E[x_1^2] - a_2E[x_1x_2] + E[x_2^2] + dc_1E[x_1y_1] - dc_2E[x_1y_2] \\
&\dot{E}[x_2^2] = -2a_1E[x_1x_2] - 2a_2E[x_2^2] + 2dc_1E[x_2y_1] - 2dc_2E[x_2y_2] \qquad \dot{E}[x_1y_1] = E[x_2y_1] + E[x_1y_2] \\
&\dot{E}[y_1x_2] = -a_1E[y_1x_1] - a_2E[y_1x_2] + E[y_2x_2] + \sigma^2d/2c_1 \qquad \dot{E}[y_2x_1] = -b_1E[x_1y_1] - b_2E[x_1y_2] + E[x_2y_2] \\
&\dot{E}[y_2x_2] = -b_1E[x_2y_1] - a_1E[y_2x_1] - (a_1+b_1)E[y_2x_2] - \sigma^2d/2c_2
\end{aligned}
\right\} \quad (8)
$$

1自由度系の変位の共分散は(8)式を数値解析することにより$E[x_1^2]$を求めれば得られる。図-1，図-2は各々図中の条件について，解析解と共分散方程式による数値解析の結果を比較したものである。図中では両者の差は認められない程一致している。またこの数値解の条件は，参考文献[1]で用いられている条件である。この文献において，形状関数を階段関数で近似して従来の積分による方法を適用しているが，この手法と比較して，共分散方程式による解法は 極めて容易に計算でき，さらに精度が良いことがわかる。

3． 実際の非定常不規則外力が作用した場合の二乗平均応答

実際の構造物に作用する非定常不規則外力を振巾の包絡線を表わす形状関数と，振巾の包絡線の変化を定常化した不規則過程に分離し，さらにこの不規則過程を白色雑音がフィルターを通過したものと考えて，このフィルターを構成しているパラメーターを決定し，フィルターを表わす微分方程式を得ると，上記した共分散方程式による解法が可能になる。

形状関数である振巾の包絡線は次のように，1自由度系のフィルターを用いることにより計算される。

$$\ddot{g}(t) + 2h\,\omega_0\,\dot{g}(t) + \omega_0^2\,g(t) = \ddot{f}(t) \qquad g(t) = (\,g(t)^2 + \dot{g}(t)^2/\omega_0^2\,)^{1/2} \tag{9}$$

ただし，h；減衰定数，ω_0；固有円振動数，$\ddot{f}(t)$；実際の非定常な不規則外力。さらに次のような操作により$\ddot{f}(t)$の包絡線を定常化する。ただし$z^*(t)$ は定常化された確率過程である。

$$z^*(t) = f^*(t)\,/\,g(t) \tag{10}$$

(4)式の定常解のパワースペクトラムを$S_z(\omega)$とすると，(2)式とWiener-Khintchimeの定理より次式になる。

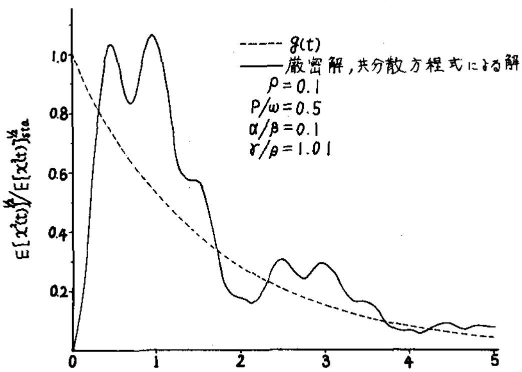
$$S_z(\omega) = 2\beta\sigma^2\,(\beta^2+\Omega^2+\omega^2)\,/\,\{\,(\beta^2+\Omega^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2\,\} \tag{11}$$

もし$z^*(t)$のパワースペクトラム$S_z^*(\omega)$が単一のピークを持つような場合，それは(11)式で近似できる，その時のフィルターパラメーターは次の条件を満足するものとして決定される。

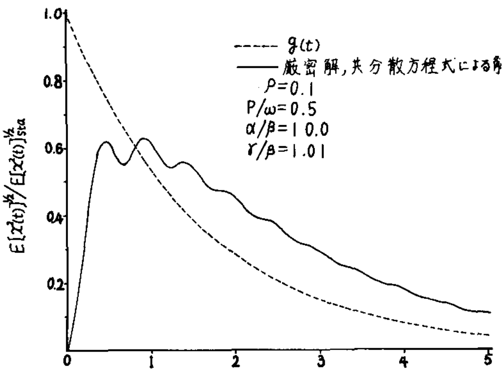
(i) $S_z^*(\omega)$と$S_z(\omega)$のピークを生ずる固有円振動数を各々ω'，$\omega^{*\prime}$とすると，これを一致させる。

(ii) $S_z^*(\omega)$と$S_z(\omega)$のピークを等しくする。すなわち $S_z^*(\omega^{*\prime}) = S_z(\omega')$

(iii) $z(t)$と$z(t)^*$ の分散を等しくするために，$S_z(\omega)$と$S_z^*(\omega)$の面積を等しくする。



図−1



図−2

参考文献； [1] Hasselman；"Linear Response to Nonstationary Random Excitation" EM3, ASCE, June 1972
[2]亀田弘行，山田裕一；"強震地震動の非定常スペクトルについて"第13回地震工学研究発表会