II－4　非定常不規則外力を受ける1自由度系の応答　(1)
(形状関数が階段関数の場合)

長崎大学　工学部　正員　岡林　隆敏

1．はじめに

地震外力，風荷重，波浪による外力のように土木構造物に作用する外力は，再現性のない不規則な荷重である場合が多い。さらにそれらの外力に関して，振巾の包絡線や周波数特性が時間とともに変化する非定常性を伴っている。このような構造物系の信頼性を評価するためには，構造物系にこのような外力が作用したときの応答に関する種々の統計量を求めなければならない。本文においては，非定常外力は振巾の包絡線を表わす形状関数と，任意のパワースペクトラムを持つ定常確率過程の積によって構成されるものと仮定し，構造物系を1自由度と仮定した場合について，二乗平均応答を求めるための基礎式である共分散方程式を誘導した。さらに計算例として，形状関数が階段関数の場合について，従来の方法による解析解と，本法による数値解析による結果を比較したものである。

2．系に作用する外力のモデル化　振巾の包絡線が時間と供に変化する非定常確率過程 $f(t)$ は，従来考えられているように，ある特定のパワースペクトラムを持つ定常確率過程 $z(t)$ と包絡線の時間的変化を表わす確定関数である形状関数 $g(t)$ との積で表わされるものとする

$$f(t) = z(t)\cdot g(t) \qquad (1)$$

ある特定のパワースペクトラムを持つ確率過程は，白色雑音がある系に作用したときの応答として得ることができる。このような系をフィルター系と称することにすると，フィルター系は一般に次のような微分方程式で記述される。

$$\left.\begin{aligned}
z(t) &= b_1 y_1(t) + b_2 y_2(t) + \cdots\cdots + b_n y_n(t)\\
\dot{y}_1(t) &= a_{11} y_1(t) + \cdots\cdots + a_{1n} y_n(t) + c_1 n_1(t)\\
&\text{------}\\
\dot{y}_n(t) &= a_{n1} y_1(t) + \cdots\cdots + a_{nn} y_n(t) + c_n n_n(t)
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

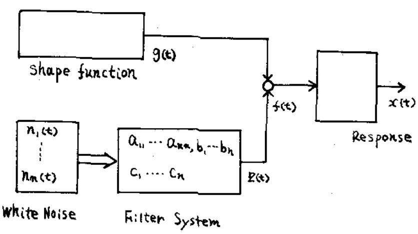

図　1

$b_1,\cdots,b_n,\ a_{11},\cdots,a_{nn},\ c_1,\cdots,c_n$，はフィルター出力のパワースペクトラムの形状を決定するシステムパラメーター，ただし，これらの係数は系に作用する外力のパワースペクトラムに一致するように決定する，これらの関係をブロック線図で示したものが第1図である。

3．基礎式の誘導　1自由度系の運動を表わす方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t) \qquad (3)$$

ただし，ζ；減衰定数，ω；固有円振動数。(1)，(2)，(3)式を状態空間でベクトル表示するために，次のような変数を考える。 $X(t) = \{x, \dot{x}, y_1, \cdots, y_n\}^T = \{x_1, x_2, y_1, \cdots, y_n\}^T$　(4)　すると(1)，(2)，(3)式は次式で表わされる。 $\dot{X}(t) = A(t)\cdot X(t) + D\cdot W(t)$　(5)　ただし，$A(t)$，D，$W(t)$ は次式で表わされる。さらに，(2)式のフィルター方程式をベクトル表示すると(6)式になる。

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -\omega^2 & -2\zeta\omega & g(t)b_1 & \cdots & g(t)b_n\\ 0 & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & c_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n\end{bmatrix} \quad W(t) = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ n_1(t)\\ \vdots\\ n_n(t)\end{bmatrix} \qquad (6)$$

$\dot{X}_f(t) = A(t)_f \cdot X_f(t) + D_f v_f(t)$ (7)

$X_f(t) = \{y_1, \cdots, y_n\}^T$ (8)

ただし，$X_f(t)$は次式で示されるn次元ベクトル，$A_f(t)$，D_f，$v_f(t)$ は次式で表わされる。

$$A_f(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad D_f = \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & C_n \end{bmatrix} \quad v(t) = \begin{bmatrix} n_1(t) \\ \vdots \\ n_n(t) \end{bmatrix} \tag{9}$$

(5)と(7)に対応する共分散方程式は次式で与えられる。 $\dot{R}(t) = A(t) \cdot R(t) + R(t) A^T(t) + D \cdot Q(t)$ (10)

$\dot{R}_f(t) = A_f(t) R_f(t) + R_f(t) \cdot A_f(t)^T + D_f \cdot Q_f(t)$ (11) ただし，$R(t)$，$R_f(t)$ は各々 $E[X \cdot X^T]$，$E[X_f \cdot X_f^T]$ である。$E[\ ]$ は集合平均，$Q(t)$，$Q(t)_f$ は次式で与えられる $(n+2)$ 及び n の正方行列である。

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & S_n \end{bmatrix} \qquad Q_f(t) = \begin{bmatrix} S_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & S_n \end{bmatrix}$$

ただし，S_iは白色雑音のパワースペクトラム。従って$R_f(t)$ は$R(t)$と独立に求められるので，$R(t)$は次のように分割される。

$$R(t) = \left[\begin{array}{c:c} R_x(t) & R_{fx}(t) \\ \hdashline R_{xf}(t) & R_f(t) \end{array}\right] \tag{12}$$

$R_x(t)$；(2×2)の振動系に関する対称な共分散行列，$R_{fx}(t)$，$R_{xf}(t)$；(2×n)，(n×2)の振動系とフィルター系の共分散方程式，$R_f(t)$；(n×n)のフィルター系の共分散方程式。ところがフィルター系は定常であるので，$\dot{R}_f(t) = 0$となり，(11)式は次式で与えられる代数方程式になる。 $A_f R_f + R_f A_f^T + D_f Q_f = 0$ (13)

従って，次式で与えられる微分方程式に(13)式より求めたR_fを代入することにより，振動系の応答の共分散を得ることができる。ただし$[\ ]_2$は$(n+2)\times 2$の行列を表わしている。

$$\begin{bmatrix} \dot{R}_x(t) \\ \dot{R}_{xf}(t) \end{bmatrix} = \Big[A(t) \cdot R(t)\Big]_2 + \Big[R(t) \cdot A^T(t)\Big]_2 + \Big[D \cdot Q(t)\Big]_2 \tag{14}$$

4．計算例　従来の非定常応答の解析①には，形状関数として階段関数，定常確率過程として次式で与えられる自己相関関数を持つものについて計算されているので，計算例としてはこの条件を用いる。

$R_g(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|} \cos \Omega\tau$ (15)

(15)式の相関関数を形成するフィルター系は次式で与えられる微分方程式で与えられる。(16)，(3)式より，(17)式で表わされる共分散方程式を得る。ただし $x = x_1$，$\dot{x} = x_2$，$y = y_1$，$\dot{y} = y_2$ とする。

$$\left.\begin{aligned} &z(t) = \sqrt{2\beta}\left((\beta^2+\Omega^2)^{1/2} y(t) - \dot{y}(t)\right) \\ &\ddot{y}(t) + 2\beta\dot{y}(t) + (\Omega^2+\beta^2)y(t) = n(t) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} &\dot{E}[x_1^2] = 2E[x_1x_2] \\ &\dot{E}[x_1x_2] = -a_1E[x_1^2] - a_2E[x_1x_2] + E[x_2^2] + dC_1E[x_1y_1] - dC_2E[x_1y_2] \\ &\dot{E}[x_2^2] = -2a_1E[x_1x_2] - 2a_2E[x_2^2] + 2dC_1E[x_2y_1] - 2dC_2E[x_2y_2] \\ &\dot{E}[x_1y_1] = E[x_2y_1] + E[x_1y_2] \\ &\dot{E}[y_1x_2] = -a_1^2E[y_1x_1] - a_2^2E[y_1x_2] + E[y_2x_2] + \sigma^2 d/2C_1 \\ &\dot{E}[y_2x_1] = -b_1E[x_1y_1] - b_2E[x_1y_2] + E[x_2y_2] \\ &\dot{E}[y_2x_2] = -b_1E[x_2y_1] - a_1E[y_2x_1] - (a_1+b_1)E[y_2x_2] - \sigma^2 d/2C_2 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

ただし，$a_1 = \omega^2$，$a_2 = 2\zeta\omega$，$b_1 = (\Omega^2+\beta^2)$，$b_2 = 2\beta$，$C_1 = \sqrt{b_1 b_2}$，$C_2 = \sqrt{b_2}$，$d = g(t) = u(t)$。(17)式を適当な条件のもとで解けば，応答の共分散が得られる。図2，3は，図中の条件における，共分散方程式の解法と従来の厳密解との比較を示したものである。

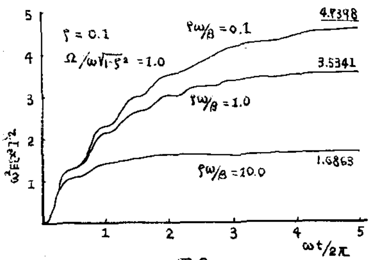

図 2

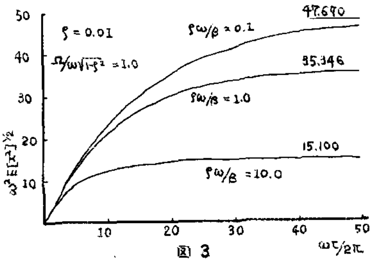

図 3

参考文献 ① Hasselman, T.K., "Comparison of Solution of the Mean-Square Response of a Simple Mechanical Oscillator to Nonstationary Random Excitation" JAME, Vol 27, Dec. 1970