

、 学生員 ○高橋英俊

2 剛性方程式 図1に与えんはりの座標軸および節点位置を示す。節点変位は、図心の ξ, η, ζ 方向変位 u, v, w 、断面回転角 θ 、 ξ, η 軸まわりの撓角 ψ_ξ, ψ_η 、 ζ 軸に関するねじれ角 ψ_ζ である。節点力としては、はり全体に分布している慣性力と等価な力を各節点で考える。

$$\bar{P}_0 = P_0 l, \quad L = l/l, \quad \bar{a} = a/l, \quad \alpha = l_e/l, \quad l_e \text{ 是 } l \text{ 要素長}$$

$\bar{U}, \bar{V}, \bar{\Theta}, \bar{W}$ を次のように L のベキ級数で仮定する。

$$\bar{U} = a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3, \quad \bar{V} = b_0 + b_1 L + b_2 L^2 + b_3 L^3$$

$$\bar{\theta} = C_0 + C_1 L + C_2 L^2 + C_3 L^3, \quad \bar{W} = d_0 + d_1 L \quad \text{----- (1)}$$

(1) 式の係数 $a_0, a_1, \dots, d_0, d_1$ は節点 i ($L=0$), j ($L=\alpha$) での変位によつて次のように表わされる。

$$Q = H/H(1) \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$c \in \tau, \quad \mathcal{Q} = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_d, d_i\}^T, \quad \mathcal{U} = \{\bar{\sigma}_u^i \bar{\tau}_u^i \bar{\nu}^i \bar{\tau}_\nu^i \bar{\theta}^i \bar{\tau}_\theta^i \bar{w}^i \bar{\sigma}_j^i \bar{\tau}_j^i \bar{\nu}^j \bar{\theta}^j \bar{\tau}_\theta^j \bar{w}^j\}^T$$

#1 は無次元化された初期曲率重, 各じれ率重を含んだ(14×14)のマトリックスである。

節点力 F が作用している立体曲線はり要素に対する仮想仕事の原理は次のように書ける²⁾

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}^T \mathcal{F} = & \int_0^\alpha \{ \bar{\tau}_1 / 2 \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_w \delta \bar{\tau}_w + \bar{R}_5 \bar{\tau}_u \delta \bar{\tau}_u + \bar{R}_7 \bar{\tau}_v \delta \bar{\tau}_v + \bar{R}_w \bar{\tau}_\theta \delta \bar{\tau}_\theta - \bar{N}_5 / \alpha (\bar{\tau}_w \delta \bar{\tau}_u + \bar{\tau}_u \delta \bar{\tau}_w) \\ & - \bar{N}_7 / \alpha (\bar{\tau}_w \delta \bar{\tau}_v + \bar{\tau}_v \delta \bar{\tau}_w) + \bar{R}_5 \bar{\tau}_v (\bar{\tau}_u \delta \bar{\tau}_v + \bar{\tau}_v \delta \bar{\tau}_u) - \bar{R}_5 \bar{\tau}_w (\bar{\tau}_u \delta \bar{\tau}_\theta + \bar{\tau}_\theta \delta \bar{\tau}_u) \\ & - \bar{R}_7 \bar{\tau}_w (\bar{\tau}_v \delta \bar{\tau}_\theta + \bar{\tau}_\theta \delta \bar{\tau}_v) + \bar{G}^M / \alpha \bar{\tau}_\theta \delta \bar{\tau}_\theta \} dL \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{そこで, } \bar{G} = G/E, \quad \bar{F}_w = d\bar{w}/dL - \bar{\Phi}_1 \bar{U}, \quad \bar{\Omega}_u = d\bar{\Omega}_u/dL - \bar{\Phi}_1 \bar{U}, \quad \bar{\Omega}_v = d\bar{\Omega}_v/dL + \bar{\Phi}_1 \bar{U} - \bar{\Phi}_2 \bar{\Omega}_a$$

$$\bar{\Omega}_0 = d\bar{\Omega}_0/dL, \quad \bar{P}_\alpha = d\bar{P}_\alpha/dL - \bar{\Phi}_\alpha \bar{V} + \bar{\Phi}_\alpha \bar{W}, \quad \bar{P}_v = d\bar{P}_v/dL + \bar{\Phi}_v \bar{U}, \quad \bar{P}_\theta = d\bar{P}_\theta/dL + \bar{A} \bar{\Phi}_\theta \bar{V} \dots (4)$$

であり、また(3)式中の各断面定数は次の定義による。

$$\bar{T} = \frac{1}{A} \int_A \frac{1}{T} dA, \quad \bar{R}_1 = \frac{1}{A} \int_A \frac{r_1^2}{T} dA, \quad \bar{R}_2 = \frac{1}{A} \int_A \frac{r_2^2}{T} dA, \quad \bar{R}_3 = \frac{1}{A} \int_A \frac{r_3^2}{T} dA, \quad \bar{N}_1 = \frac{1}{A} \int_A \frac{r_1}{T} dA$$

$$\bar{N}_1 = \frac{1}{\alpha^3} \int_0^{\frac{\alpha}{N_1}} \frac{1}{N_1^2} dA, \quad \bar{R}_{12} = \frac{1}{\alpha^3} \int_0^{\frac{\alpha}{N_1}} \frac{1}{N_1^2} dA, \quad \bar{R}_{13w} = \frac{1}{\alpha^3} \int_0^{\frac{\alpha}{N_1}} \frac{1}{N_1^2} dA, \quad \bar{R}_{17w} = \frac{1}{\alpha^3} \int_0^{\frac{\alpha}{N_1}} \frac{1}{N_1^2} dA.$$

$$M = \frac{1}{\alpha} \int_A \frac{1}{N^2} \left\{ \left\{ -\gamma + g \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\omega}{N^2} \right) \right\}^2 + \left\{ \xi + g \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\omega}{N^2} \right) \right\}^2 \right\} dA, \quad \sqrt{\gamma} = 1 - \bar{\alpha} \frac{\Phi}{\xi_0} \quad \omega \text{ は図心に関するそり関数}$$

(4) 式に(1)式を代入し、(2)式の関係を用いると、 $\bar{F}_w, \bar{Q}_u, \bar{Q}_v, \bar{Q}_\theta, \bar{F}_\theta$ が節点変位で表わされる。

$$\bar{F}_w = \mathbb{L}^T G_1 H/U, \quad \bar{F}_u = \mathbb{L}^T G_2 H/U, \quad \bar{F}_v = \mathbb{L}^T G_3 H/U, \quad \bar{F}_\theta = \mathbb{L}^T G_4 H/U, \quad \bar{F}_\theta = \mathbb{L}^T G_5 H/U \dots (5)$$

ここに $U = \{1 \ L \ L^2 \ L^3\}^T$, $G_i (i=1, \dots, 5)$ は (4×4) のマトリックスである。

(5) 式を(3)式に代入し、 L に関して積分すると次の剛性方程式が得られる

$$\mathbb{F} = \mathbb{K} \cup \mathbb{J}$$

K は立体曲線はり要素の剛性マトリックスで、次式で表わされる。

$$K = H^T \{ \bar{r}_2^T G_1^T A G_1 + \bar{r}_3^T G_2^T A G_2 + \bar{r}_4^T G_3^T A G_3 + \bar{r}_5^T G_4^T A G_4 - \bar{N}_2^T (G_1^T A G_2 + G_2^T A G_1) \\ - \bar{N}_3^T (G_1^T A G_3 + G_3^T A G_1) + \bar{r}_3^T (G_2^T A G_3 + G_3^T A G_2) - \bar{r}_{3w}^T (G_2^T A G_4 + G_4^T A G_2) \\ - \bar{r}_{4w}^T (G_3^T A G_4 + G_4^T A G_3) + \bar{G}_5^T G_5^T A G_5 \} H \quad \text{----- (7)}$$

ここで、 $A = \int_0^L L \cdot L^T dL$ である。

自由振動問題での節点力 F は、 F のなす仮想仕事 δW が分布慣性力がなす仮想仕事 δW^0 に等しいとの仮定より求まる。

$$\delta W F = - \frac{m A \bar{r}^T}{E \bar{G}^T} \int_0^L \delta X E \frac{\partial^2 X}{\partial T^2} dL = - \lambda \int_0^L \delta X E \frac{\partial^2 X}{\partial T^2} dL \quad \text{----- (8)}$$

ここで、 $X = \{ \bar{u}, \bar{v}, \bar{\theta}, \bar{w} \}^T$ 、 $T = \tau t$ 、 τ は円振動数、 t は時間、 E は次に示すマトリックス

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \bar{a}_3 \frac{\bar{r}^T}{A} & 0 \\ 0 & 1 & -\bar{a}_3 \frac{\bar{r}^T}{A} & 0 \\ \bar{a}_3 \frac{\bar{r}^T}{A} & -\bar{a}_3 \frac{\bar{r}^T}{A} & \frac{1}{A} (\bar{I}_3 + \bar{I}_1 - \bar{a}_3 \bar{r}_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \bar{A} &= \frac{1}{\bar{G}^2} \int_A dA, \quad \bar{I}_3 = \frac{1}{\bar{G}^2} \int_A \bar{r}^2 dA, \quad \bar{I}_1 = \frac{1}{\bar{G}^2} \int_A \bar{r} dA \\ \bar{I}_{3r} &= \frac{1}{\bar{G}^2} \int_A \bar{r} \bar{r}^T dA, \quad \bar{r}_3 = \frac{1}{\bar{G}^2} \int_A \bar{r} (\bar{r}^2 + \bar{r}^T) dA \end{aligned} \quad \text{----- (9)}$$

X に(1)式を代入し(2)式を用いると、 X が節点変位で表わされる。

$$X = B \bar{u} = B H H U \quad \text{----- (10)}$$

(10)式を(8)式に代入すると、等価節点力が求まる。

$$F = - \lambda H H^T \left(\int_0^L B^T E B dL \right) H H^T \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} = - \lambda M \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} \quad \text{----- (11)}$$

ここに、 $M = H H^T \left(\int_0^L B^T E B dL \right) H H^T$ は質量マトリックスである。

$U = U_0 \sin T$ として(6)、(11)式を用いると、立体曲線はり要素に関する振動方程式が求まる。

$$(K - \lambda^2 M) U_0 = 0 \quad \text{----- (12)}$$

3.数値解析例 図1に示すような断面を有し、中心角 90° 、 $R = 500 \text{ mm}$ 、ピッチ角 20° の両端固定せんばりの振動解析を行なう。はりをも要素に等分割して得られた振動固有値入を表に示す。比較のためにガレルキン法にて解析した結果⁹⁾も示す。両者の差は約 $\pm 2\%$ であり、ここで示した剛性マトリックス、質量マトリックスを用いると良好な結果が得られることがわかる。

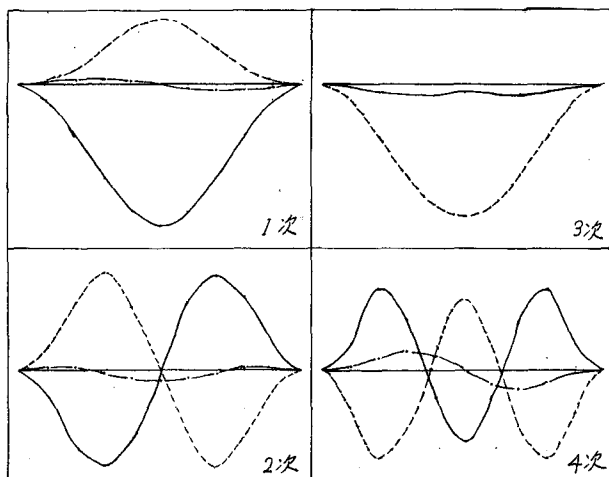
また図2は振動波形の1例である。

図2

—— $\bar{u}$
- - - $\bar{v}$
—— $\bar{\theta}$

表：振動固有値 $\lambda = \sqrt{\frac{m A \bar{r}^T}{E \bar{G}^T}} \tau$

次数	F.E.M	ガレルキン法	差(%)
1	1.0787	1.0696	+0.9
2	2.7205	2.6853	+1.3
3	3.7191	3.7436	-0.7
4	5.4165	5.3292	+1.6
5	5.8291	5.8975	-1.2
6		8.6009	
7		8.7483	
8	9.4525	9.2977	+1.7
9	9.6318	9.6975	-0.7
10	14.176	14.334	-1.1



文献 1) 築地、神代、山下、薄肉断面を有するうせんばりの振動、才24回応力連合講演会講演集 昭49

2) 築地、初期曲率、わじれ率を有する薄肉断面曲線はりの基礎方程式、土木学会論文報告集 230号