

長崎大学工学部 正員 高橋和雄
長崎大学工学部 学生員 鷺見博由
九州大学工学部 正員 橋本 武

1. 緒言 平板が中間で弾性ばりにて支持される連続長方形板の振動解析に関しては、以前から幾多の理論的、実験的研究がなされてきたが、これらの既往研究はいずれも中間弾性ばりが一径間の場合を対象としたものである。一方、現実に見受けられる連続長方形板においては弾性ばりが連続ばりあるいはラーメン部材の一部で構成される場合がある。このような板骨組複合構造物の取り扱いには現在のところ見受けられないようである。そこで本研究は連続桁およびラーメン部材の一部で支持される一方向連続長方形板の振動解析法を提案するとともに、2. 3の連続板構造について数値計算を行なったものである。

2. 解法 (1) 規準関数の誘導 長方形板 A C D B において、図-1 のような直交座標系 (x, y, z) を導入する。板は周囲の他に中間において連続ばりあるいはラーメン部材の一部で支えられているものとし、各部材にそれぞれ、1, 2, ..., n からなる支度番号を付す。長方形板が振動すれば各支度には垂直反力および反力モーメントを生ずるが、これらは長方形板の振動変位を拘束する一種の強制力とみなすことができる。はりの垂直反力ははり幅全域にあたって等分布するような応力を生じ、反力モーメント M_k は三角形分布するような応力を生じるものと仮定すれば、本題の連続板の運動方程式は次式で与えられる。³⁾

$$D \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = - \sum_{k=1}^n \left(\bar{V}_k \bar{V}_{kn} - \frac{E}{a} \bar{M}_{kn} \right) \sin m_k \bar{x} \sin n_k \bar{y} \sin(\omega t + \epsilon) \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ：板剛度、 E ：板のヤング率、 h ：板厚、 ν ：ポアソン比、 ρ ：板の単位体積あたりの質量、 w ：板のたわみ、 t ：時間、 ω ：固有円振動数、 ϵ ：初期位相角、

$$\bar{V}_{km} = \frac{\sin m_k \bar{x}}{m \pi a} \sin n_k \bar{y}, \quad \bar{M}_{kn} = \frac{3}{m \pi^2 a^2} \left(\frac{\sin m_k \bar{x}}{m \pi a} - \cos m_k \bar{x} \right) \cos n_k \bar{y},$$

$2\delta a$ ：はり幅、 $\xi = \bar{x}/a$ 、 $\eta = \bar{y}/a$ 、 $\bar{V}_k$ 、 $\bar{M}_{kn}$ 、垂直反力 $\bar{V}_k$ および反力モーメント M_k の級数展開係数

式(1)の微分方程式の一般解は次のように求められる。

$$w = W \sin(\omega t + \epsilon) \dots \dots \dots (2) \quad \text{ここに、} W = \sum_{k=1}^n \{ A_k \sin \bar{x}_k \bar{y} + B_k \cos \bar{x}_k \bar{y} + C_k \sinh \bar{x}_k \bar{y} + D_k \cosh \bar{x}_k \bar{y} - \frac{a^2}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{K_{km}} \left(\bar{V}_k \bar{V}_{km} - \frac{E}{a} \bar{M}_{kn} \right) \sin m_k \bar{x} \sin n_k \bar{y} \dots \dots \dots (3)$$

$$K_{km} = (m^2 + n^2 \mu^2) - \lambda_k^2, \quad \mu = b/a (\text{辺長比}), \quad \lambda_k = \sqrt{\rho h \omega^2 \cdot a} (\text{固有値}), \quad \bar{x}_k = \sqrt{\lambda_k^2 - (n \pi / a)^2}, \quad \bar{x}_k = \sqrt{\lambda_k^2 + (n \pi / a)^2}, \quad A_n, B_n, C_n, D_n: \text{積分定数}$$

他方、中間弾性ばり R は板から伝えられる強制力 $\bar{V}_k$ および M_k 、また中間支柱 $\bar{y}$ から伝えられる垂直反力 R_k^y 、反力モーメント M_k^y 、端モーメント M_k^x 、 M_k^y および捩りモーメント M_k^x の作用を受け、板と同じ円振動数 ω で振動しているが、板と弾性ばりの変形条件式を求めるために、かかるはりのたわみ曲線および捩れ角曲線を板と同じ関数系で表わす必要がある。まず、強制力として板から伝達される垂直反力 $\bar{V}_k$ および柱から伝達される垂直反力 R_k^y 、反力モーメント M_k^y および端モーメント M_k^x 、 M_k^y の作用を受けるはり R (図-2a) の曲げ振動の微分方程式は次のようになる。

$$E_k I_k \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + R_k A_k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^n \left\{ \bar{V}_k \left(\bar{V}_{kn} - \frac{E}{a} \bar{M}_{kn} \right) + \frac{3}{b} \bar{M}_{kn}^y \cos n_k \bar{y} \right\} + \frac{3}{b} \left(\bar{M}_{kn}^x + \frac{E}{a} \bar{M}_{kn}^y \right) \sin n_k \bar{y} \sin(\omega t + \epsilon) \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 $E_k I_k$ ：はりの曲げ剛性、 R_k ：はりの単位体積あたりの質量、 A_k ：はりの断面積、 b_k ：はりのたわみはりの両端が単純支持または固定とすれば、式(4)からはり R の規準関数が次のように求められる。

$$\bar{x}_k = \frac{b}{a} \sqrt{\lambda_k^2 - \frac{E_k I_k \omega^2}{R_k A_k}} \dots \dots \dots (5) \quad \text{ここに、} \lambda_k = b \sqrt{\rho_k A_k \omega^2 / E_k I_k}$$

また、強制力として板から伝達される反力モーメント M_k および柱からの反力モーメント M_k^y の作用を受けるはり R (図-2b) の捩れの振動の微分方程式は次のように与えられる。

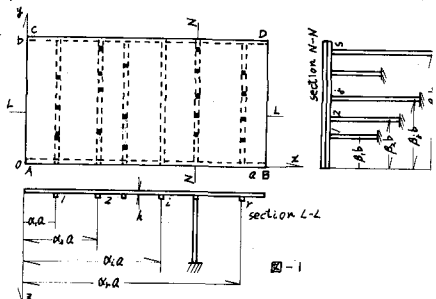


図-1

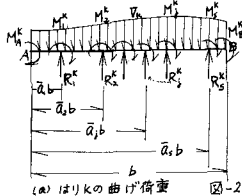
$$G_{RJA} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - E_{RJA} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{b} \frac{M_{RJA}^0}{G_{RJA}} \sin n \pi \bar{y} \right) \sin n \pi \bar{y} \sin (\omega t + \epsilon) \dots (6)$$

ここに、 G_{RJA} はりの捩れ剛性、 E_{RJA} はりの極慣性モーメント

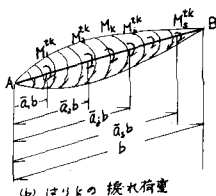
はりの捩れに対する境界条件が固定とすれば、捩れ振動の規準関数が次のように定められる。

$$\psi_R = - \frac{b^2}{G_{RJA} \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \lambda^2 c^2} \left[M_{RJA}^0 + \frac{2}{b} \sum_{j=1}^{\infty} M_{RJA}^{0j} \sin n \pi \bar{y}_j \right] \sin n \pi \bar{y} \dots (7)$$

ここに、 $\lambda_{JR} = b \sqrt{E_{RJA} / G_{RJA}}$



(a) はりの曲げ荷重



(b) はりの捩れ荷重

また、柱部材については既往の振動たわみ角式を適用すれば、柱頭モーメント M_k とたわみ角 θ_k との関係が、次のようになる。

$$\theta_k = \frac{1}{\lambda_c} \frac{M_k \delta_c}{E_c I_c} \quad (\text{柱下端が固定の場合}), \quad \theta_k = \frac{1}{\lambda_c} \frac{M_k \delta_c}{E_c I_c} \quad (\text{柱下端がヒンジの場合}) \dots (8)$$

ここに、 δ_c 柱の部材長、 $\lambda_c = \sqrt{E_c I_c / G_c}$ 、 A_c 柱の断面積、 ρ_c 柱の単位体積あたりの質量、 $E_c I_c$ 柱の曲げ剛性、 $\delta_c = (\cosh \lambda_c \sin \lambda_c - \sinh \lambda_c \cos \lambda_c) / (1 - \cosh \lambda_c \cos \lambda_c)$ 、 $\delta_c = \lambda_c \sinh \lambda_c \sin \lambda_c / (1 - \cosh \lambda_c \cos \lambda_c)$

(2) 振動数方程式の誘導 本研究は各方向の一对辺が単純支持されかつス方向の一对辺が仕様の境界条件をもつ一方連続長方形板について適用可能であるが、紙面の都合上他対辺をも単純支持される場合についてのみ取り扱うことにすれば本例の周辺が単純支持される場合の境界条件では式(6)の積分定数 $A_n \sim D_n$ を含む余関数の項は分離することができるのでここでは余関数の項を省略することにする。板と弾性ばり R の接合部では板のたわみ $w(x, y)$ およびス方向のたわみ角 $\partial w(x, y) / \partial x$ は弾性ばり R のたわみ $\psi_R(x)$ および捩れ角 $\theta_R(x)$ にそれぞれ等しいことから、式(3)、(5)および(7)から変形条件式が次の内容となる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} (G_{Rn}^0 \bar{v}_{Rn} + G_{Rn}^0 \bar{v}_{Rn} + G_{Rn}^0 \bar{v}_{Rn} + \sum_{j=1}^{\infty} (G_{Rn}^{0j} \bar{R}_j^0 + G_{Rn}^{0j} \bar{R}_j^0) + G_{Rn}^0 \bar{v}_{Rn} + G_{Rn}^0 \bar{v}_{Rn} = 0 \dots (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (H_{Rn}^0 \bar{v}_{Rn} + H_{Rn}^0 \bar{v}_{Rn}) + H_{Rn}^0 \bar{v}_{Rn} + \sum_{j=1}^{\infty} H_{Rn}^{0j} \bar{R}_j^0 = 0 \dots (10)$$

ここに、 $k = 1, 2, \dots, r$ 、式中の suffix は n の関数を示し、 $\bar{}$ は各未知数をスケールしたことを示す。

はり R の支柱の位置 $\bar{x}$ におけるたわみ $\psi_R(\bar{x})$ が、柱部材の柱頭部における伸縮量に相等しくならねばならないが通常のラメーソ解法の仮定同様に、伸縮の影響を無視すれば、 $\Sigma \bar{x}(\bar{x}) = 0$ の条件から次式がえられる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_{Rn} + \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{R}_j^0 \bar{R}_j^0 + \bar{R}_j^0 \bar{R}_j^0) + \bar{v}_{Rn} \bar{v}_{Rn} + \bar{v}_{Rn} \bar{v}_{Rn} = 0 \dots (11)$$

またはり R の支柱位置 $\bar{x}$ でははりのたわみ角 $\partial \bar{x}(\bar{x}) / \partial x$ が柱の柱頭部の回転角 θ_R に合致することより次式をうる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{Rn}^0 \bar{v}_{Rn} + \sum_{j=1}^{\infty} (S_{Rn}^0 \bar{R}_j^0 + S_{Rn}^0 \bar{R}_j^0) + S_{Rn}^0 \bar{v}_{Rn} + S_{Rn}^0 \bar{v}_{Rn} + S_{Rn}^0 \bar{v}_{Rn} = 0 \dots (12)$$

はり R の曲げに対する境界条件が固定の場合には、はり端部のたわみ角が零であるから次の式が求められる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{Rn}^0 \bar{v}_{Rn} + \sum_{j=1}^{\infty} (Q_{Rn}^0 \bar{R}_j^0 + Q_{Rn}^0 \bar{R}_j^0) + Q_{Rn}^0 \bar{v}_{Rn} + Q_{Rn}^0 \bar{v}_{Rn} = 0 \dots (13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{Rn}^0 \bar{v}_{Rn} + \sum_{j=1}^{\infty} (P_{Rn}^0 \bar{R}_j^0 + P_{Rn}^0 \bar{R}_j^0) + P_{Rn}^0 \bar{v}_{Rn} + P_{Rn}^0 \bar{v}_{Rn} = 0 \dots (14)$$

また、はり R の支柱位置 $\bar{x}$ で、はりの捩れ角 $\theta_R(\bar{x})$ が柱の柱頭部の回転角 θ_R と合致することから次式となる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_{Rn}^0 \bar{v}_{Rn} + \sum_{j=1}^{\infty} T_{Rn}^0 \bar{R}_j^0 + T_{Rn}^0 \bar{v}_{Rn} = 0 \dots (15)$$

式(9)~(15)をすべて連立させれば未知数 $M_{Rn}, \bar{v}_{Rn}, \dots$ を求めるための基本連立方程式をうるが、定数項がいずれも零であるために、その係数行列式の値が零でなければならぬことから、本題の固有値が求められることになる。なお、基本連立方程式には未知数の単独項と総和の項が同時に含まれるために、解析は一種の試算による試算算法に依らねばならない。

3. 計算例 講演時に発表する。

参考文献 (1) 梶原：平面板の自由振動に及ぼす防境材の影響について、造船協会会報、第78号、昭和22年5月 (2) *Thin Wok: Vibrations of Stiffened Plates, The Aeronautical Quarterly*, Vol. 15, 1964, (3) 高橋・橋本、一方連続く形板の振動解析、土木学会第22回年次学術講演会講演概要集、第1部、昭和41年10月、(4) 小野薫：撓角撓度法とその実用化、建築学会論文集、第5号、1937。