I－11　拡大された剛性マトリックスの解析とその応用

熊本大学　正　員　平井一男
熊本大学　学生員　筒井光男
熊本大学　学生員　○米倉博志

1. まえがき

構造物が修正された場合の構造物再解析の手法は　従来からいろいろと試みられている。その一解析手法として、付加外力を導入する方法を我々は先の報告で切欠き問題として示した。応力集中問題等では、これを有限要素法を用いて解析するとき、応力が急変する部分をより細かく分割し、解き直す必要が生じることがある。このような場合は　細分割により自由度が増加し、全体の剛性マトリックスは拡大される。今回はこの細分割により拡大された剛性マトリックスの問題を修正問題の一つとしてとり扱い、いかに付加外力を導入し、用いるかについて述べる。原構造物の剛性マトリックスの逆マトリックス、外力または変位が与えられていれば、修正構造物は修正部に関して縮合されたマトリックス、ベクトルを用いて解くことができる点は今までと変わりない。

2. 理論

(i) 付加外力を用いた修正の基礎式

原構造物(System Aとよぶ)の剛性マトリックス$\mathbb{K}$と、その逆マトリックス$\mathbb{K}^{-1}$が既知のとき、剛性マトリックス$\mathbb{K}$に$\Delta\mathbb{K}$の修正があれば、修正構造物(System Bとよぶ)の変位$\mathbb{W}$は付加外力$\Delta\mathbb{F}$を用いて次のように表わされる。

$$\overline{\Delta\mathbb{F}} = -(\mathbb{I} + \overline{\Delta\mathbb{K}}\,\overline{\mathbb{K}_a^{-1}})^{-1}\,\overline{\Delta\mathbb{K}}\,\overline{\mathbb{K}_b^{-1}}\,\mathbb{F} \qquad (1)$$

$$\mathbb{W} = \mathbb{K}^{-1}(\mathbb{F} + \Delta\mathbb{F}) \qquad (2)$$

ここで$\mathbb{F}$＝外力、$\mathbb{I}$＝単位ベクトル、$\Delta\mathbb{F}$＝付加外力、$\overline{\mathbb{K}_a^{-1}}$は$\mathbb{K}^{-1}$の修正部に相当する部分マトリックス、$\overline{\mathbb{K}_b^{-1}}$は$\mathbb{K}^{-1}$の中から修正部を含む行だけをぬき出した部分マトリックスである。

(ii) 拡大された剛性マトリックスと$\overline{\Delta\mathbb{K}}$の誘導

自由度が増加する場合は、剛性マトリックス$\mathbb{K}$が拡大され付加外力を用いた式がそのまま使えない。しかし、以下に述べるように新節点の変位を消去し、剛性マトリックスを縮合すれば(1)式,(2)式を用いることができる。

System A の剛性マトリックスが　次のように与えられているとすると

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12} \\ \mathbb{K}_{21} & \mathbb{K}_{22} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

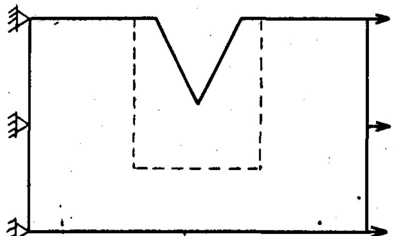
ここで、$\mathbb{K}_{11}$, $\mathbb{K}_{22}$は正方マトリックス、$\mathbb{K}_{22}$は　図－1 System Aの点点内部に相当する部分マトリックスである。

細分割により自由度が増し、新節点がマトリックスの外側にくるものとして　$\mathbb{K}^*$の修正が加わると

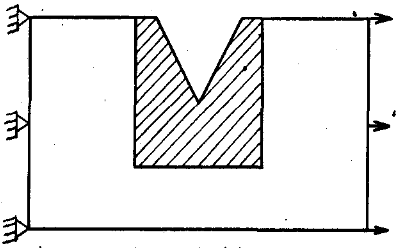
$$\mathbb{K} + \mathbb{K}^* = \left[\begin{array}{cc:c} \mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12} & \\ \mathbb{K}_{21} & \mathbb{K}_{22} & 0 \\ \hdashline & 0 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c:cc} 0 & & 0 \\ \hdashline 0 & \mathbb{K}_{ii} & \mathbb{K}_{ij} \\ & \mathbb{K}_{ji} & \mathbb{K}_{jj} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12} & 0 \\ \mathbb{K}_{21} & \mathbb{K}_{22}+\mathbb{K}_{ii} & \mathbb{K}_{ij} \\ 0 & \mathbb{K}_{ji} & \mathbb{K}_{jj} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

あるいは

$$\mathbb{F} = (\mathbb{K} + \mathbb{K}^*)\mathbb{W} \qquad (5)$$



(a) System A　(粗く分割している)



(b) System B　(斜線部を細分割している)

図－1

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22}+K_{ii} & K_{ij} \\ 0 & K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_j \end{bmatrix} \tag{6}$$

ここで、新節点に作用する外力$F_j=0$とすれば、新節点の変位w_jは

$$w_j = -K_{jj}^{-1} K_{ji} w_2 \tag{7}$$

次にw_jを消去し、剛性マトリックスを共通節点部に縮合すると

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22}+K_{ii}-K_{ij}K_{jj}^{-1}K_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

ここで、 $K_{ii}-K_{ij}K_{jj}^{-1}K_{ji}=\overline{\Delta K}$ とおくと

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22}+\overline{\Delta K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

この式では 細分割の影響が$\overline{\Delta K}$で表わされている。この$\overline{\Delta K}$を用い(1)式,(2)式より変位$w\left(=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\right)$を求めることができる。以上、変位が求まればそれにより応力も求まる。

8. 数値計算例

解析モデルとして図−2のモデルを考える。いま解こうとしているSystem Bは System Aに付加外力ΔFを作用させた系として解くことができる。

モデルの諸元はすべて無次元化して、下のように定めた。

弾性係数$=1.0$　　ポアソン比$=0.3$　　板厚$=1.0$

外力 $F=1.0$　　$l=1.0$

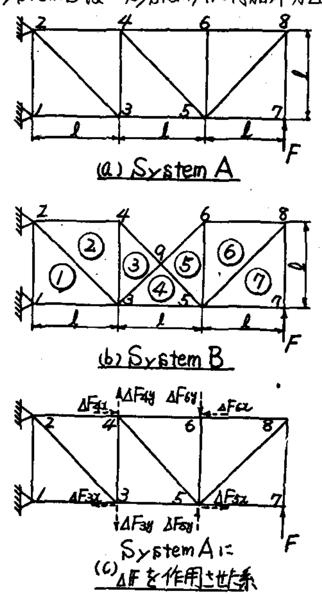
計算結果の中から、ΔFと応力σ_xを下に示す。応力σ_xは System Bを直接解いて得られた解を直接解として、それらの比較で示した。計算値はまったく同じとなっている。

$$\Delta F = \begin{bmatrix} -6.8269 \\ -5.7902 \\ 10.8420 \\ 5.4274 \\ 6.4641 \\ 4.4464 \\ -10.4792 \\ -4.0836 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdots \Delta F_{3x} \\ \cdots \Delta F_{3y} \\ \cdots \Delta F_{4x} \\ \cdots \Delta F_{4y} \\ \cdots \Delta F_{5x} \\ \cdots \Delta F_{5y} \\ \cdots \Delta F_{6x} \\ \cdots \Delta F_{6y} \end{matrix}$$

付加外力

要素	本法	直接解
①	3.9438	3.9438
②	−3.9438	−3.9438
③	−4.6523	−4.6523
④	8.0301	8.0301
⑤	−3.3779	−3.3779
⑥	−1.0100	−1.0100
⑦	1.0100	1.0100

表−1 System Bのσ_x



図−2 解析モデル

4. あとがき

上の理論、計算例で示されるように要素細分割による剛性マトリックスの拡大は付加外力で補うことができる。応力集中問題にこの方法を用いれば、応力集中部を二度、三度と細分割していくことにより 修正部に縮合された小さなマトリックスの演算で応力集中をより正確に把握できる。

参考文献

(1) Uri Kirsh and Moshe F. Rubinstein, "Reanalysis for Limited Structural Design Modifications," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. February. 1972

(2) 平井、水田、渡辺；応力集中を求める一解析法，S49年度西部支部年次講演会概要集

(3) 平井、水田、渡辺；一部修正による応力集中問題の解析手法 第29年次学術講演会概要集 S49年10月