

九州大学 学生員 ○ 明田敏郎

九州大学 正員 太田俊昭

1. まえがき

吊橋の鉛直変形挙動については、微分方程式による撓度理論や有限変形と考慮した変形法などの諸解法によって十分解明されているが、これらはいずれも弾性範囲を対象としており、その弾塑性挙動ならびに破壊メカニズムを理論的に解明した例は極めて少ない。本研究は吊橋の静力学的安全性ならびに耐震工学上の基礎的指針をうけるため、漸増および変動くり返し荷重に対する吊橋の非線形挙動とより的確につかむための弾塑性有限変形理論の体系的確立を目指すものであり、本報では、その第1段階として、bilinear型応力-ひずみ曲線の導入および部材が負の軸力を受けもたないために生じる全体剛性の低減をも考慮しうる増分形式の弾塑性有限変形理論を提示するとともに、同理論を用いて簡単な吊橋を対象に選り、上記荷重に対する非線形挙動を解明し、かつ、耐震解析に必要な吊橋の非線形履歴特性について若干の考察を試みた。

2. 変形法公式 (1) 主ケーブルおよび吊材についての基本式

荷重段階が先番目から $(k+1)$ 番目に变化したときの位置ベクトル、軸力などの諸量は図-1のように表わすと、方向余弦 $C_{AB}^{(k)}$ 、部材 AB の伸びの増分 ΔL_{AB} 、方向余弦の増分 ΔC_{AB} は次のように表わされる。

$$L_{AB}^{(k)} C_{AB}^{(k)} = d_A^{(k)} - d_B^{(k)} \quad (1) \quad \dot{L}_{AB} = C_{AB}^{(k)T} (d_A - d_B) \quad (2)$$

$$\dot{C}_{AB} = C_{AB}^{(k)*} (\dot{d}_A - \dot{d}_B) / L_{AB}^{(k)} \quad (3)$$

ただし、 $C_{AB}^{(k)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{AB}^{(k)} \\ \sin \alpha_{AB}^{(k)} \end{bmatrix}$ 、 $d_A^{(k)}, d_B^{(k)}$ は部材 AB 両端の原点からの位置ベクトルで、 $d_A^{(k)} = \begin{bmatrix} x_A^{(k)} \\ y_A^{(k)} \end{bmatrix}$ 、 $d_B^{(k)} = \begin{bmatrix} x_B^{(k)} \\ y_B^{(k)} \end{bmatrix}$ 、 $\dot{d}_A, \dot{d}_B$ は変位の増分ベクトル、 $C_{AB}^{(k)T}$: $C_{AB}^{(k)}$ の転置マトリクス、 $C_{AB}^{(k)*} = \mathbf{I} - C_{AB}^{(k)} C_{AB}^{(k)T}$ 、 $\mathbf{I}$: 単位マトリクス、 L_{AB} : 部材長、 k : 荷重段階を示す。

また、活荷重によって部材 AB に生じる軸力の増分 $\dot{N}_{AB}$ は $\dot{N}_{AB} = \dot{\sigma}_{AB} A_{AB}$ であり、

また、応力-ひずみの関係とbilinear型と仮定すれば、図-2より $\dot{\sigma} = M/E \dot{\epsilon}$ が成立立つ。したがって $\dot{N}_{AB}$ は

$$\dot{N}_{AB} = M_{AB} E A_{AB} \dot{\epsilon}_{AB} = M_{AB} E A_{AB} \dot{L}_{AB} / L_{AB0} \quad (4)$$

ただし、 L_{AB0} は死荷重のみによるつりあい状態での部材長。

さらに、式(2)を式(5)に代入すれば、

$$\dot{N}_{AB} = \dot{L}_{AB} C_{AB}^{(k)T} (d_A - d_B) / L_{AB0} \quad (\text{ただし、} \dot{L}_{AB} = M_{AB} E A_{AB} \dot{\epsilon}_{AB}) \quad (5)$$

次に、部材力の増分 $\dot{F}_{AB}$ は次式のごとく表わされる。

$$\dot{F}_{AB} = \begin{bmatrix} \dot{X}_{AB} \\ \dot{Y}_{AB} \end{bmatrix} = \dot{N}_{AB} C_{AB}^{(k)} + N_{AB}^{(k-1)} \dot{C}_{AB} \quad (\text{ただし、} X_{AB}, Y_{AB} \text{ はそれぞれ部材端Aの方向とy方向の部材力}) \quad (6)$$

そこで、式(3)、(5)を式(6)に代入し整理すれば、軸力部材の変形法公式が次のように求められる。

$$\dot{F}_{AB} = K_{AB}^{(k)} (\dot{d}_A - \dot{d}_B) / L_{AB0} \quad (\text{ただし、} K_{AB}^{(k)} = \dot{L}_{AB}^{(k-1)} C_{AB}^{(k-1)T} + N_{AB}^{(k-1)} C_{AB}^{(k-1)} \dot{C}_{AB}^{(k-1)} / L_{AB}^{(k-1)}) \quad (7)$$

なお、式(7)の $K_{AB}^{(k)}$ に含まれる係数 M_{AB} と定数1.0とおけば弾性域での解析となり、後藤氏の誘導式¹⁾を増分形式に書き改めたものに合致する。ただし、増分は総べて $(k+1)$ 番目の荷重段階のもの表わす。

(2) 補剛桁についての基本式 補剛桁の誘導は微小変形理論に基づくが、ここでは、軸力の影響と無視する。

補剛桁と吊材の接合点 $i=1, 2, \dots, n$ において補剛桁に作用する鉛直部材力をそれぞれ $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ とすれば、これらは図-3に示すような単純ばりに作用する外力とみなすことができる。したがって、主筋点の曲げモーメントの増分ベクトル $\dot{M}$ は次のように表わすことができる。

$$\dot{M} = K_M \dot{Y} \quad (\text{ただし、} \dot{Y} \text{ は鉛直部材力の増分を表わす列ベクトル、} K_M \text{ は係数マトリクス。}) \quad (8)$$

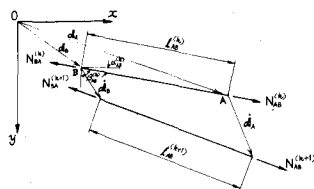


図-1

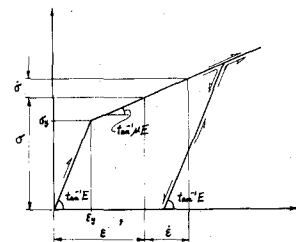


図-2

また、曲率と曲げモーメントの関係は式(2)を参考すれば、次のような増分形式の関係式となる。

$$\dot{\phi} = \dot{\phi}^M + \dot{\phi}^P \quad (\text{ただし、}\dot{\phi}^M: \text{曲率の増分を表わす列ベクトル、}\dot{\phi}^P: \text{塑性曲率の増分を表わす列ベクトル、}\dot{\phi} = [1/EI].) \quad (9)$$

次に、節点 i の鉛直変位は中-法公式²⁾より

$$v_i = (x_i/l_0) \int_0^{l_0} \phi(l_0-x) dx - \int_0^{x_i} \phi(x_i-x) dx \quad (10)$$

と表わされるゆえ、上式を台形法で書き改めて全節点についての鉛直変位の増分を表わす列ベクトル $\dot{v}$ とすると次式のようにになる。

$$\dot{v} = S \dot{\phi} \quad (\text{ただし、} S: \text{係数マトリクス}) \quad (11)$$

そこで、式(8)、(9)を式(11)に代入のうえ整理すれば、補剛桁についての変形法公式が次のように求められる。

$$\dot{Y} = K_S \dot{v} - K_S \dot{v}_0^P \quad (\text{ただし、} K_S = (ES/K_0)^T, \dot{v}_0^P: \text{補剛桁の塑性変形増分}) \quad (12)$$

3. 応用例および結果 以上の誘導式を併用して図-4のような単純吊橋の解析を行なう。すなわち、接合点1の力のつりあい式を求めれば

$$\dot{F}_{AB}(1) - \dot{F}_{AB}(2) + \dot{F}_{AB}(3) - \dot{F}_{AB}(4) = 0 \quad (\text{ただし、}\dot{F}_{AB} = \dot{F}_{AB}/G_0 A_0, G_0: \text{降伏応力}) \quad (13)$$

であるから、式(7)を代入のうえ、 x 方向、 y 方向成分について整理して表わせば次のようになる。

$$b_{11}^{(k+1)} \dot{u}_1 + b_{12}^{(k+1)} \dot{v}_1 + b_{13}^{(k+1)} \dot{u}_2 + b_{14}^{(k+1)} \dot{v}_2 + b_{15}^{(k+1)} \dot{v}_3 = 0 \quad (14)$$

$$b_{21}^{(k+1)} \dot{u}_1 + b_{22}^{(k+1)} \dot{v}_1 + b_{23}^{(k+1)} \dot{u}_2 + b_{24}^{(k+1)} \dot{v}_2 + b_{25}^{(k+1)} \dot{v}_3 = 0 \quad (15)$$

ただし、 $\dot{u} = \dot{u}/l_0$, $\dot{v} = \dot{v}/l_0$, u : 水平変位, v : 鉛直変位, l_0 : 補剛桁の全長。

また、補剛桁と吊材の接合点2, 3でつりあい式を求めれば次式となる。

$$\text{接合点2: } \dot{F}_{AB}(2)_{y\text{成分}} + \dot{F}_2 = 0 \quad (16) \quad \text{接合点3: } \dot{F}_{AB}(3)_{y\text{成分}} + \dot{F}_3 = \dot{P} \quad (17)$$

ただし、 $\dot{F} = \dot{F}/G_0 A_0$, $\dot{P} = \dot{P}/G_0 A_0$, $\dot{P}$: 活荷重の増分, () 内は節点番号。

式(7)、(12)を式(16)、(17)に代入のうえ整理すると次式がえられる。

$$b_{31}^{(k+1)} \dot{u}_1 + b_{32}^{(k+1)} \dot{v}_1 + b_{33}^{(k+1)} \dot{u}_2 + b_{34}^{(k+1)} \dot{v}_2 + b_{35}^{(k+1)} \dot{v}_3 = C_1 \quad (18)$$

$$b_{41}^{(k+1)} \dot{u}_1 + b_{42}^{(k+1)} \dot{v}_1 + b_{43}^{(k+1)} \dot{u}_2 + b_{44}^{(k+1)} \dot{v}_2 + b_{45}^{(k+1)} \dot{v}_3 = C_2 + \dot{P} \quad (19)$$

よって、式(14)、(15)、(18)と式(19)の連立方程式を解けば、活荷重 P に対する各

節点の変位をえることができる。ただし、式(14)、(15)、(18)、(19)の b は $K_{AB}^{(k)}$, K_S に固有変数, $C^{(k+1)}$ は $K_S, \dot{v}_0^P$ に固有変数。

そこで漸増荷重、正負漸増荷重および種々のくり返し荷重について数値解析を行ない、結果

の一部を図-5、図-6および図-7に示す。図-5はケーブルおよび吊材の断面の塑性化に伴う

剛性の減少効果と示したものである。また、図-6は荷重 P が漸減され負荷に至ったとき、吊

材およびケーブルが順次たもんで圧縮力を受けもたなくなるための全弾性剛性の低減効果を

明らかにしており、特に吊構造全体が力を受けもたなくなる点に達すると当然のことながら

補剛桁だけの剛性に移行することを示している。一方、くり返し荷重に対する吊構造の履歴特性

が、本例の場合図-7のような4種類の異なる挙動を示し(図の(a)(b)(c)のループは同じ経

路をたどり、(d)の補剛桁が弾塑性応力状態(E点)に達するに至って往復

異なる経路をたどる)。この非線形バグーンは死荷重の大きさやケー

ブル吊材ならびに補剛桁の太さに支配されることが分かる。

(参考文献)

- 1) 佐藤茂夫: 有限変形による吊橋の解法, 土木学会論文集, 第158号, S. 473, B.
- 2) T. Ohta & T. Yamauchi: Elasto-Plastic Analysis of Steel Structures Considering the Effects of Residual Stress and Finite Deformation, Proc. of JSCE, No. 114, Oct. 1971.
- 3) 村田重久, 太田俊昭: 吊橋の弾塑性大たもみ解析(第1報), 九州大学工学集報, 第45巻, 第4号, S. 47, B.

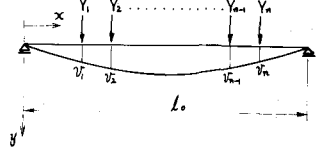
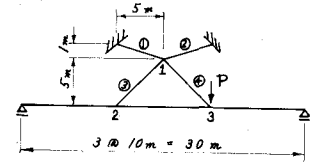


図-3



1, 2, 3: 節点番号
① ~ ②: 吊材番号

図-4

(データ)
断面種: 補剛桁 $A_0 = 0.08746 \text{ m}^2$
ケーブル $A_c = 0.005 \text{ m}^2$
吊材 $A_d = 0.002 \text{ m}^2$
補剛桁の断面二次モーメント $I = 0.002 \text{ m}^4$
 $E = 2.1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$, $G_0 = 3600 \text{ kg/cm}^2$, $M = 0.1$

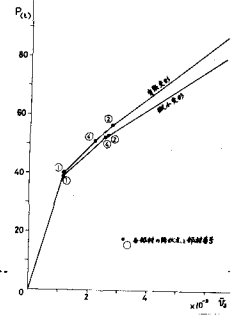


図-5

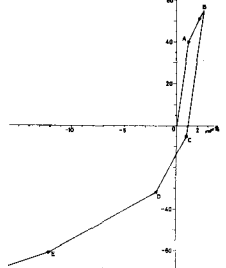


図-6

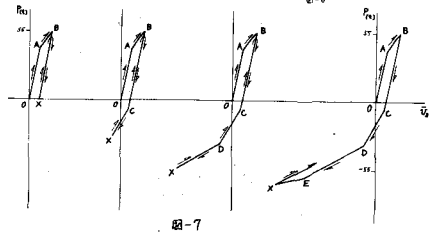


図-7