

大阪大学 小松定夫
熊本大学 ○ 崎元達郎

りまえばき；マトリクス構造解析における幾何学的非線型問題の解法は、荷重漸増法、Newton-Raphson法を併用した修正荷重漸増法によって、よく行なわれるが、それには、増分荷重-増分変位の間の接線剛性マトリクスに加えて、全荷重-全変位の間の剛性マトリクスの存在が前提とされる。一方、材料の塑性化を考慮する場合、応力-ひずみ関係は、その履歴に依存すると考えられるため、全荷重と全変位の間のつりあい方程式は、一般には、一義的に求まらない。したがって、幾何学的非線型性に加えて、材料学的非線型性を考慮すべき問題に於ては、接線剛性マトリクスのみで増分的に解を求めて行かざるを得ない場合が生じる。このような観点から、三次元骨組構造物の幾何学的・材料学的非線型解析の可能な接線剛性マトリクスを、初期応力法に基づいて導出した。ここでは、その誘導方法の概略と平面骨組部材に関する若干の数値例を示す。

2) 解析上の仮定； i) 完全弾塑性材料でできた軸対称の薄肉箱型断面とし、St. Venant のねじりが支配的で、そのねじりは無視できる断面寸法とする。 ii) 断面の塑性化の後も Bernoulli-Navier の平面保持の仮定が成立する。 iii) St. Venant のねじりによるせん断流は、断面の塑性化の後も、周方向に一定である。 iv) von Mises の降伏条件が成立し、降伏域では、Prandtl-Reuss の応力-ひずみ式が成立する。 v) ひずみは微小である。(変位は、必ずしも微小でなくても良い。)

3) 接線剛性マトリクス； オイ段階までに変形した構造部材の上に、右手系の局所座標 (x, y, z) を、次の荷重増分の後、変形した構造部材の上に (ξ, η, ς) を、断面のせん断中心を原点として、図-1のように定める。以下、本稿では、記号に $\cdot$ を付したもので、全変位、全ひずみ等を表わし、 $\cdot$ を付さない記号は、増分量を意味するものとする。断面内の任意点の軸ひずみの増分は、部材軸の変位増分 u, v, w および、ねじれ角増分 ϕ により次式で表わされる。

$$\varepsilon = u' - \frac{1}{2}[(v')^2 + (w')^2] - (z - s)\phi' - (s + \eta\phi)w'' + \frac{1}{2}(\eta^2 + \varsigma^2)(\phi')^2 \quad (1)$$

状態 i での節点荷重を $\bar{P}$ 、状態 $i+1$ での節点荷重を $\bar{P} + P$ 、その間の節点変位増分を u とすると、外力ポテンシャルの増分 V は、

$$V = -U^T(\bar{P} + P) - U^T \cdot P \quad (2)$$

で表わされる。状態 i での任意点の応力を (σ, τ) 、断面力の増分を $f = [N - M_x \ M_y \ M_z]^T$ 、変形の増分を $d = [\varepsilon_0 - \gamma_x \ \gamma_y \ \phi]^T$ とし、荷重増分中の線型性を仮定すると、内力のなす仕事の増分 Π は、

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L d^T f dx + \int_0^L \bar{\sigma} \varepsilon dA + \int_0^L \bar{M}_z \phi' dx \quad (3)$$

と表せる。一方、断面力増分 f と変形増分 d の関係は、弾塑性ねじりを考慮して、次式で与えられる。⁽¹⁾

$$\begin{bmatrix} N \\ -M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA + \frac{C_2}{C_1 + C_2} & ES_y + \frac{C_3 C_0}{C_1 + C_2} & ES_z + \frac{C_3 C_0}{C_1 + C_2} & \frac{C_3 C_6}{C_1 + C_2} \\ & EI_y + \frac{C_2^2}{C_1 + C_2} & EI_{yz} + \frac{C_2 C_5}{C_1 + C_2} & \frac{C_4 C_6}{C_1 + C_2} \\ & & EI_z + \frac{C_2^2}{C_1 + C_2} & \frac{C_5 C_6}{C_1 + C_2} \\ & & & I_z - \frac{C_2 C_6^2}{C_1(C_1 + C_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ -\gamma_x \\ \gamma_y \\ \phi' \end{bmatrix} \quad (4)$$

または、 $f = [A_e + A_p] \cdot d = A \cdot d$

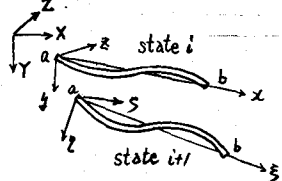


図-1 座標系

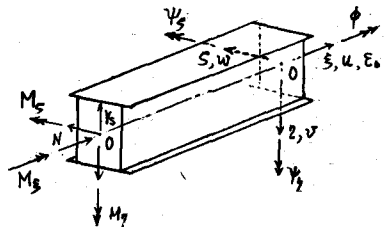


図-2 断面力、変位の正方向

式(3)に式(1)および式(4)を代入すると、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L d^2 u^2 dx + \int_0^L N \left\{ u + \frac{1}{2} (v')^2 + \frac{1}{2} (w')^2 \right\} dx + \int_0^L \bar{M}_5 (v'' + \phi w'') dx - \int_0^L \bar{M}_2 (w'' - \phi v'') dx + \frac{1}{2} \int_0^L \bar{T} (\phi')^2 dx \\ & + \int_0^L \bar{M}_3 \phi' dx \quad \text{ここに} \quad \bar{N} = \int \sigma dx, \bar{M}_5 = - \int \sigma \eta dx, \bar{M}_2 = \int \sigma s dx, \bar{T} = \int \sigma (\eta^2 + s^2) dx, \bar{M}_3 = \int \sigma \eta \kappa dx \end{aligned} \quad (5)$$

次に、 x 軸方向の任意変位増分を u , ϕ については、 x の一次式 v, w については、 x の三次式で近似できるものとして、有限要素法で用いられる手法により、式(4), (5)に含まれる任意変位増分、変形増分を節点変位増分で表示する。最終的に、系のポテンシャルエネルギーの増分 $\Pi = \Pi + \bar{V}$ は、節点変位増分 U で表示され、 U による変分をとると、節点外力増分と節点変位増分を関係づける次式のようなつりあい式が得られる。

$$(K_e + K_p + K_g) \cdot U = P - R, \quad R = \bar{F} - \bar{P} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに} \quad U = & [u_a \ u_b \ u_c \ \phi_a \ \phi_b \ \phi_c \ u'_a \ u'_b \ u'_c \ \phi'_a \ \phi'_b \ \phi'_c]^T \\ P = & [P_{xa} \ P_{xb} \ P_{xc} \ M_{xa} \ M_{xb} \ M_{xc} \ P_{xb} \ P_{xb} \ P_{xb} \ M_{xb} \ M_{xb} \ M_{xb}]^T \\ \bar{P} = & [\bar{P}_{xa} \ \bar{P}_{xb} \ \bar{P}_{xc} \ \bar{M}_{xa} \ \bar{M}_{xb} \ \bar{M}_{xc} \ \bar{P}_{xb} \ \bar{P}_{xb} \ \bar{P}_{xb} \ \bar{M}_{xb} \ \bar{M}_{xb} \ \bar{M}_{xb}]^T \\ \bar{F} = & [-\bar{N} \ 0 \ 0 \ -\bar{M}_5 \ -\bar{M}_2 \ -\bar{M}_3 \ \bar{N} \ 0 \ 0 \ \bar{M}_5 \ \bar{M}_2 \ \bar{M}_3]^T \end{aligned}$$

K_e は、部材の弾性部分による剛性マトリクス、 K_p は部材の塑性化により生ずる剛性マトリクス、 K_g は状態 i での断面力を要素に含む初期応力マトリクスで、幾何学的非線型を表わす。 R は定式化の際の線型化変形増分途上での塑性化による誤差等に対する補正力(つりあい力)である。式(7)の導出に際しては、式(5)中の部材軸方向の積分を可能なうにする為に、部材要素内で $\bar{F}$ は、一定(塑性化は一樣である)とした。

4) 数値計算例; 断面方向と部材軸方向に、直方体要素に分割し、一つの細要素の応力、ひずみ状態は、その要素の重心点のそれらで代表させる。平面保持の仮定等、細要素間の自由度は拘束されているから、通常の有限要素法ほど次数を増加させることなく、断面内および軸方向の塑性域の広がりを考慮して解析することができる。計算法の概略は以下のようである。

i) 増分荷重について、変位増分を計算する。ii) 細要素の応力を計算し、降伏を判定する。iii) 断面力を計算する。iv) 節点座標値を変更する。v) K_e, K_p, K_g を新しく作成する。vi) 次の荷重増分について解く。vii) i) ~ vi) をくり返す。数値計算は、熊大卒業生、杉本正二と宮崎晴之が熊大計算機室の FACOM 230-25 を用いて行った。弾塑性問題に関する数値例は、講演会当日に発表の予定である。

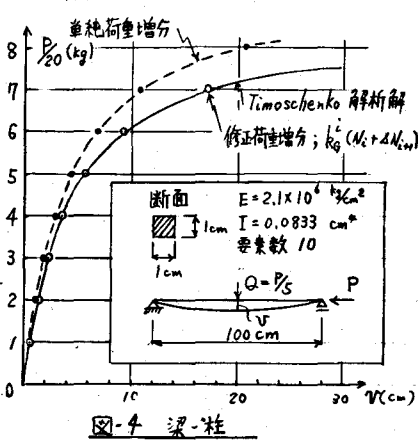


図-4 梁-柱

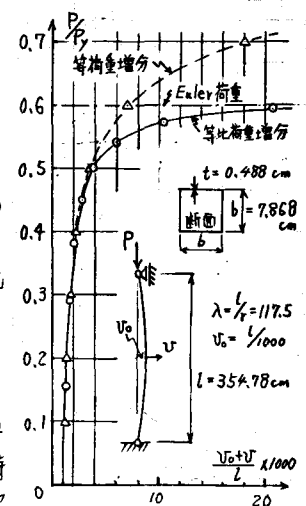


図-5 初期たわみのある柱

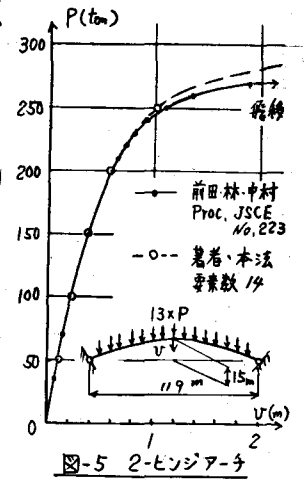


図-6 2-ヒンジアーチ

参考文献

- 1) komatsu & Sakimoto "Elasto-Plastic Behavior of Steel Members..." Trans. of J.S.C.E., 1975 (投稿中)
- 2) Bažant, Z.P. & M.E. Nimeiri "Large-Deflection Spatial Buckling..." Jour. of A.S.C.E., EM6, Dec., 1973
- 3) 三本木茂夫 "梁および板の非線型解析" J.A.S.C. 構造解析法研究発表論文集 昭和46年5月