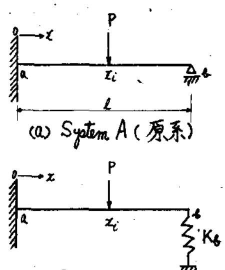
I－4　　Müller-Breslau の原理による境界条件の変更(不動点から可動点へ)

熊本大学　正員　平井 一男
〃　〃　○水田 洋司

はじめに

構造物の不動点を可動点に変更する手法について，前報[1]ではマトリックス解析を用いて述べたが，今回はMüller-Breslau の原理を用いて，連続体とくに梁問題における解析手法[2]を提案する。図-1 の System A から System B に変更する場合，System A は解析されているものとする。

支点の境界条件を不動から可動にかえるためには，まずその支点が単位量動いた時のその支点の反力を求める必要がある。これは以下の手順により求めることができる。System A の支点反力の影響線は，Müller-Breslau の原理によれば，その支点反力に対応する支点変形が単位量変位した時の弾性線に等しい。従って，System A の支点反力の影響線を求めることにより，その支点が単位量変位した時の弾性線を決定することができる。この弾性線より支点に任意の変形(w)を与えた時，その支点に作用する反力 $\{R(w)\}$ を求めることができる。



(a) System A (原系)

(b) System B (変更系)

図-1 モデル

理論

変更後の系，System B の支点の境界条件は，System A の支点反力 $R(F)$ と支点変形による支点反力 $R(w)$ の和が，System B の支点反力 $K \cdot w$ に等しいとおくことにより満足させることができる。式で表わせば次式の様になる。

$$R(w)+R(F)=K \cdot w \tag{1}$$

ここに，w：変更支点の変形量，$R(w)$：支点変形による反力，$R(F)$：外力による反力，K：弾性支点のバネ定数

System B の変形(W_B)は，System A の変形(W_A)に支点変形(w)による値を補正することにより，求めることができる。補正変形量(W)は，先に求めた弾性線に(1)式を満足する w をかけあわせた値である。

1. 単数の支点変更

図-1 に示す系の支点変更について考える。x_i 点に P なる集中荷重が作用した時の System A の変形を W_A とする。System A の支点 b の反力の影響線を $R_i(x)$ とすると，支点 b が単位量変形した時の弾性線 $f_i(x)$ は，Müller-Breslau の原理より次の様に表わされる。

$$f_i(x)=R_i(x) \tag{2}$$

System A が(2)式で表わされる様な弾性線に変形した時の支点 b のせん断力 Q_b は，たわみ線 $y_i(x)$ を用いて

$$Q_b=EI\left\{\frac{d^3}{dx^3}y_i(x)\right\}_{x=l} \tag{3}$$

と表わされる。また支点 b が y_b だけ変形した時のせん断力は(3)式より，$y_b \cdot Q_b$ である。支点 b の反力は，支点 b のせん断力に等しいから，次式となる。

$$R(y_b)=y_b \cdot Q_b \tag{4}$$

System A の x_i 点に P なる荷重が作用した時の支点 b の反力を R_b とすると，System B の支点 b での釣合い式は，

$$R(y_b)+R_b=K_b \cdot y_b \tag{5}$$

となる。この式に，(3)式 (4)式を代入すると，y_b は次式により求められる。

$$y_b=R_b\Big/\left\{K_b-EI\left(\frac{d^3}{dx^3}y_i(x)\right)_{x=l}\right\} \tag{6}$$

ここに，EI：曲げ剛性，R_b：System A の支点 b の反力，$y_i(x)$：$y_b=1$ の時のたわみ線，K_b：弾性支点 b のバネ定数

従って，System B の変形 W_B は，(6)式で求めた y_b を用いて，(7)式で求められる。

$$W_B=W_A+f_i(x)\cdot y_b \tag{7}$$

ここに、$f_i(x)$：System A の支点 b が単位量変形した時の弾性線

2. 複数の支点変更

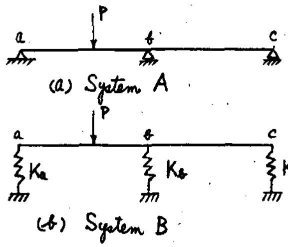


図-2 連続梁

梁の一般的問題として、図-2に示す2径間連続梁(System A)の支点が、すべて相異なるバネ定数をもつ弾性支点に変更された系(System B)について考える。各支点が単位量変形した時の弾性線をそれぞれ、$f_{ia}(x)$, $f_{ib}(x)$, $f_{ic}(x)$ とする。1.の場合と同様に、各支点での力の釣合いを考え、それをまとめて表わせば、次の様な行列式を得る。

$$\begin{bmatrix} K_a-R_{aa} & -R_{ba} & -R_{ca} \\ -R_{ab} & K_b-R_{bb} & -R_{cb} \\ -R_{ac} & -R_{bc} & K_c-R_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a \\ R_b \\ R_c \end{bmatrix} \qquad (8)$$

ここに、K_a, K_b, K_c：System B の a, b, c 各支点のバネ定数、　R_a, R_b, R_c：System A の a, b, c 各支点反力

y_a, y_b, y_c：System B の a, b, c 各支点の変形

R_{aa}, R_{ab}, R_{ac}：弾性線 $f_{ia}(x)$ における a支点、b支点、c支点の各反力

R_{ba}, R_{bb}, R_{bc}：弾性線 $f_{ib}(x)$ における a支点、b支点、c支点の各反力

R_{ca}, R_{cb}, R_{cc}：弾性線 $f_{ic}(x)$ における a支点、b支点、c支点の各反力

従って、System B の各支点の変形量は、(8)式を解くことにより求めることができる。System B の変形は、System A の変形(W_A)に、弾性支点による変形を考慮して、次の様に表わされる。

$$W_B = W_A + f_{ia}(x)\cdot y_a + f_{ib}(x)\cdot y_b + f_{ic}(x)\cdot y_c \qquad (9)$$

数値計算例

(6)式を確める意味で、図-1 の System B において、$K_b=0$ とおいた片持梁への変更を考える。しかも集中荷重 P は支点 b に作用するものとする。

支点 b が単位量変形した時の弾性線 $f_i(x)$ は、System A の支点 b の反力の影響線 $R_i(x)$ より求めることができる。

たわみ線：$y_i(x) = \frac{1}{2l^3}(3l-x)\cdot x^2$　，たわみ角線：$\theta_i(x) = \frac{3}{2l^3}(2l-x)x$

System A の支点反力 $R_b = P$　，System B の支点 b のバネ定数 $K_b = 0$

これらの値を(6)式に代入し、System B の支点 b の変形を求めると、$y_b = \frac{Pl^3}{3EI}$

従って、System B の変形は(7)式で、$W_A=0$ とおくことにより、次の様になる。

たわみ：$y(x) = y_b\cdot y_i(x) = \frac{P}{6EI}(3l-x)x^2$ ---(i)　　　たわみ角：$\theta(x) = y_b\cdot\theta_i(x) = \frac{P}{2EI}(2l-x)x$ ---(ii)

(i)式、(ii)式で求めた、たわみ、たわみ角の式は、System B を片持梁として最初から解いた値と一致する。

おわりに

(6)式、(8)式に示す様に、本論文では鉛直バネのみについて記しているが、回転バネについても同様の方法で解析することができる。また、鉛直バネ、回転バネの複合した系への変更についても、(8)式中の一部をかえるだけで、同様に処理することができる。(6)式は(8)式より導くことができる。それ故、(8)式は梁の境界条件を不動から可動へ変更する場合の一般式とみなすことができる。また(8)式のマトリックスの次数は、変更支点の数に応じて変化する。

参考文献

(1) 平井一男・水田洋司，「境界条件の変更(不動点より可動点)に関する解析手法」第29回年次学術講演会 S49.10

(2) E.N. Wilson, "Influence Lines for Beams on Elastic Supports," Journal of the Structural Division ASCE, Vol 100, No ST6, June, 1974, pp 1325～1333