

日本道路公団 正員 ○室井智文

長崎大学工学部 正員 高橋和雄

1 緒言 従来吊橋の変形や応力解析にあたっては、補剛桁の変形は鉛直、水平およびねじれ変形がそれぞれ独立に生ずるものとする解析方法が行われてきた。しかし吊橋のケーブルが空間曲線をなすことや補剛桁自身が最初からキャンバーによる曲率を持つこと、左右のケーブルの変位差などのために各変形は独立に起こることは不可能である。また、吊橋の補剛桁は一般に長大スパンで、中空断面のトラスやボックスなどの薄肉断面で構成され、かつケーブルが変形しやすい構造物であることを考慮すると、その応力解析には有限変形理論の適用や断面剛の仮定の検討などが必要である。この問題に関して最近本四連絡橋上部構造研究委員会の活動をはじめとしていくつかの研究が見受けられる。連成を考慮した吊橋の基礎方程式は幾何学的考察より力の釣合式から誘導されているために連成を含む項などに各論文の間に相違が見受けられたり、有限変形や断面変形を考慮する場合には困難が伴う。そこで本研究は変分原理を用いて最小ポテンシャルエネルギーの原理より連成を考慮した吊橋の基礎方程式の誘導を試みたものである。周知のように本法の特徴は材料力学の基本的な仮定のみを用い、後は数学的演算のみで基礎方程式を誘導することができるために、複雑な構造系への適用が可能である。本論文では、その第一報として吊橋のキャンバーによる曲率を考慮した基礎方程式を微小変形理論の範囲で導いた結果を報告するとともに、計算例として三分力を考慮した風荷重を受ける吊橋の曲げの問題に適用したものである。

2 吊橋における基本的仮定

- (1) ケーブルは完全に可撓である。
- (2) ケーブル及び補剛桁の単位長さあたりの死荷重および断面性能は各径間ごとに一定である。
- (3) 塔の伸縮および曲げは生じない。

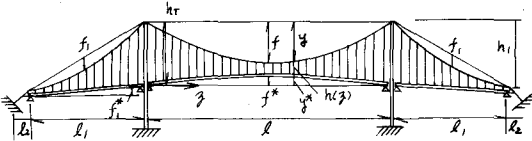


図-1 吊橋一般図

- (4) ケーブルおよび補剛桁の死荷重はケーブルのみによって支えられる。補剛桁は完全に無応力である。
- (5) 吊材は非常に細密に配置されているものとし、ケーブルと補剛桁は連続的に吊材で連結されている。
- (6) 吊材は垂直で、載荷によるひずみを無視する。
- (7) 補剛桁の断面はトラス、ボックス、プレートガーダーのいずれでもよい。
- (8) 補剛桁およびケーブルの軸方向変位を無視する。
- (9) ケーブルおよび補剛桁の変形は微小で Hooke の法則が成り立つ。
- (10) 断面剛の仮定が成り立つ。

3 ひずみ 図-2 に示すような座標系を取り、 s 軸を絶対座標の s 軸

軸の方向に定める。断面剛の仮定より、はりの任意点の変位関数が次のように定義される。

$$U = u(s) - \eta \theta_s(s) \quad (1)$$

$$V = v(s) + (\xi - e) \theta_s(s) \quad (2)$$

$$W = -\xi u'(s) - \eta v'(s) + \xi \{ \omega_n(s, \eta) + e \xi \} \quad (3)$$

ここに、 U, V, W ははりの重心 G を原点としたときのはりの任意点の

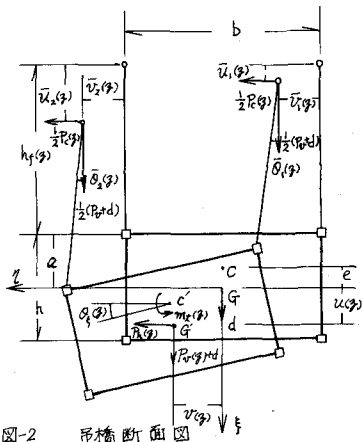


図-2 吊橋断面図

変位, u, v : セン断中心の横たわみ, θ_s : セン断中心のまわりの回転角, θ_s' : ねじれ率, ω_n : 標準化された St. Venant のゆがみ関数, e : 重心とセン断中心の間の距離, $'$ は s に関する微分を示す。

$$\begin{aligned} E_f &= E_z = \frac{1}{2} \epsilon = 0, & E_g &= -K_1 u + \eta(-v'' + K_1 \phi_f) - \xi u'' + \beta_3^* \phi_f \\ \frac{1}{2} \epsilon_{ff} &= -\eta(\beta_3^* + K_1 v') + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + K_1 \phi_f \right) \beta_3^*, & \frac{1}{2} \epsilon_{fg} &= \xi(\beta_3^* + K_1 v') + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - c \right) \beta_3^* \end{aligned} \quad (4)$$

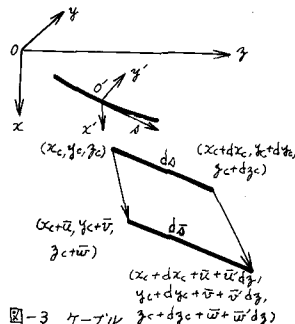
に示すように初期状態におけるケーブルの任意点 o の座標を (x_o, y_o) 、微小距離だけ離れた点を $(x_o + dx_o, y_o + dy_o)$ 、

$y_c + dy_c + \bar{v} + \bar{v} dz_c, z_c + dz_c + \bar{w} + \bar{w} dz_c$ で表わされるから、ひずみは次式で定義す

$$d\sigma = \{1 + 2\bar{w}' + \bar{w}'^2 + 2x\bar{u}' + \bar{u}'^2 + y'^2 + 2y'\bar{v}' + \bar{v}'^2\}^{\frac{1}{2}} dz_c, \quad ' \text{は } \frac{d}{dz_c} \text{ を示す.}$$

が x 方向に初期たわみを持つことを考慮して、変位の 2 次のオーダーで採れ

(6)



各要素の変形によるエネルギーを求め、補剛析のひずみエネルギーは

$$V_k = \frac{1}{2} \iiint \{ E \epsilon_s^2 + G (r_{2s}^2 + r_{3s}^2) \} d\xi d\eta d\zeta$$
$$V_{ei} = \iiint \sigma_e \varepsilon_{ei} d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} + \frac{1}{2} \iiint \sigma_e \varepsilon_{ei} d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} = H_{wr} \int_0^L (\chi' \bar{u}_i' + \frac{1}{2} \bar{u}_i'^2 + \frac{1}{2} \bar{v}_i'^2) d\bar{z} + \frac{H_{zi}}{2} \int (\chi' \bar{u}_i' + \frac{1}{2} \bar{u}_i'^2 + \frac{1}{2} \bar{v}_i'^2) d\bar{z} \quad (8)$$

吊材は伸びないと仮定したが、図-2に示すように、吊材の伝播する力の水平成分がケーブルと補剛

から見れば内力に相当すると考えられる。図-2において吊材の力の水平成分は次式によ。て与えられる。

上式における α はケーブルおよび補剛桁の変形間の適合条件を満足しなければならない。

式(6)および式(7)を用いて、吊材のなす仕事は次のように表わされる。

(4)

$$W = \int_0^L \{ (p_0 + d) u + p_h v + (m_h + p_h c) \theta_z + \frac{p_h}{2} (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) \} dz \quad (2)$$

Q2)

44

$\delta \Pi = 0$ である。変分原理を用いて式(13)を変形すると、

$$+ |E I \omega \theta_3'' \delta \theta_3'|_0^l + |M_3 - e Q_2 - E I \omega \theta_3'' + G(J - I_p) K_1 v' + G I \omega K_1^2 \theta_3'| \delta \theta_3|_0^l - \int_0^l \{ [M_7'' + K Q_3 + (2H_w + H_{p1} + H_{p2})(x_c'' + v'') + (H_{p2} - H_{p1}) \frac{K}{2} \theta_3' + R + d \} \delta u$$
$$+ \{M_1'' + K_1 M_1' - \frac{R+d}{2} (\theta_1 + \theta_2) + P_h \{ \delta w + (H_w + H_{P_1}) \bar{v}_1'' + \frac{R+d}{2} \theta_1 + \frac{B}{2} \{ \delta \bar{v}_1 + (H_w + H_{P_2}) \bar{v}_2'' + \frac{R+d}{2} \theta_2 + \frac{B}{2} \{ \delta \bar{v}_2 \} \} dz = 0 \quad (14)$$
$$Q_7 = \iint \sigma_7 \gamma \, d\zeta \, d\eta = -eGA_0 \theta_3', \quad Q_3 = \iint \sigma_3 \, d\zeta \, d\eta = -EAK_1 u, \quad M_3 = \iint \sigma_3 \, \zeta \, d\zeta \, d\eta = EI_3 (-u'' + K_1 \theta_3)$$

451

$$I_w = I_w - e^2 I_f, \quad I_f = I_k + I_f, \quad b: \text{補剛桁の幅}$$

式(4)非積分項がすべて零であることから境界条件式がえられ、また、積分項の $\delta u, \delta \theta_1, \delta \theta_2$ および δu の任意性から基礎方程式が求められる。これより次のような5つの基礎方程式が誘導される。

$$EI_f u'''' + EA_k (K_f) u - (2H_w + H_p + H_p) \frac{1}{2} (H_p - H_p) \theta_1'' = P_w - (H_p + H_p) \frac{g_f}{L_f} \quad (4)$$

$$EI_w \theta_1'' - [GJ + GJ_w (K_f) - eGA_0 + \frac{1}{2} (2H_w + H_p + H_p)] \theta_1'' + EI_f (K_f) \theta_1 - (GJ + EI_f) K_f v + \frac{1}{2} (H_p - H_p) u'' + (a-e) \frac{P_w}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) = m_k - P_k e + \frac{g}{2} (H_p - H_p) \frac{g_f}{L_f} \quad (5)$$

$$EI_f v'' - GJ_f (K_f) v'' - (GJ + EI_f) K_f \theta_1'' + \frac{P_w}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) = P_k \quad (6)$$

$$(H_w + H_p) v'' + \frac{P_w}{2} \alpha_1 = -\frac{g}{2} \quad (7) \quad (H_w + H_p) v'' + \frac{P_w}{2} \alpha_2 = -\frac{g}{2} \quad (8)$$

式(4)~(8)の他に適合条件式として、式(4)の2式が加わる。活荷重強力を決定するためのケーブル方程式がケーブルの傾斜角が載荷後も一定で、また、ケーブルの定着点が不動であることから次のように表わされる。

$$H_{pi} = \frac{E_f A_f}{L_f} [\sum \{x_i\} \int_0^L \frac{1}{L} dz + \alpha_f T L] \quad (9)$$

ここに、 $L_f = \int_0^L \sec^2 \theta_f dz$, $L_f = \int_0^L \sec^2 \theta_f dz$, θ_f : ケーブルの傾斜角, α_f : 線膨張係数, T : 温度変化

以上のようにしてえられた基礎方程式は $K_f=0$ とおけば、文献(9)の結果と実質的に合致するものである。

6 数値計算例 誘導した基礎方程式を用いて、図-1に示す径間単純吊橋(開門大橋)を対象に3分力を考慮した風荷重を受ける場合の吊橋の静的挙動を解析する。なお、風荷重はその大きさが変形とともに変化する非保存系であるため厳密には保存系として誘導した基礎方程式は適用できないが、第1近似値として有効であるものと考えられる。簡単のために左右のケーブルの水平変位が等しい($v_L=v_R=v$)とおけば、左右の吊材の傾斜角は等しい($\theta_L=\theta_R=\theta$)とおくことができる。また断面の図心とせん断中心は合致するものとする。

吊橋の補剛桁断面の空力特性によ、図-4に示すような二次元模型による

風洞実験から抗力、揚力および空力モーメントの3分力の特性曲線がえられる。これより補剛桁のねじれ角が θ 、風の迎角が α の場合の抗力、揚力および空力モーメントの係数は次のように表わされる。

$$C_D = C_0 + \left(\frac{dC_D}{d\theta}\right) \theta, \quad C_L = C_0 + \left(\frac{dC_L}{d\theta}\right) \theta, \quad C_M = C_0 + \left(\frac{dC_M}{d\theta}\right) \theta \quad (10)$$

したが、て、3分力は次のように表わされる。

$$D = D_0 + D^* \theta, \quad L = L_0 + L^* \theta, \quad M = M_0 + M^* \theta \quad (11)$$

ここに、 $D_0 = \frac{1}{2} \rho V A C_0$, $D^* = \frac{1}{2} \rho V A \left(\frac{dC_D}{d\theta}\right)$, $L_0 = \frac{1}{2} \rho V A C_L$, $L^* = \frac{1}{2} \rho V A \left(\frac{dC_L}{d\theta}\right)$

$M_0 = \frac{1}{2} \rho V A C_M$, $M^* = \frac{1}{2} \rho V A \left(\frac{dC_M}{d\theta}\right)$, ρ : 空気密度, V : 風速 (m/sec)

A_0 : 補剛桁の有効鉛直投影面積, A_L : 補剛桁の水平投影面積

また、ケーブルに作用する風荷重は次式で表わされる。 $V_L = \frac{1}{2} \rho V A_L$ (12) ここに、 A_L : ケーブルの水平投影面積

吊橋のケーブルの形はサグが f なる放物線、中央径間のキャンバーが放物線、側径間のそれは直線とすれば、中央径間および側径間の吊材の長さは次のように与えられる。

$$h(g) = h_T + \frac{4(f+g)^2}{L^2} g^2 - \frac{4(f+g)^2}{L^2} g \quad (\text{中央径間}), \quad h^*(g) = h_0 + \frac{4f^2}{L^2} g^2 - \frac{4f}{L} \left(1 - \frac{h_0}{L}\right) g \quad (\text{側径間}) \quad (13)$$

吊橋の塔が変形しないものとすれば、補剛桁およびケーブルの境界条件は次のように表わされる。

$$u(0) = u(L) = 0, \quad u'(0) = u'(L) = 0, \quad \theta(0) = \theta(L) = 0, \quad \theta'(0) = \theta'(L) = 0, \quad v(0) = v(L) = 0, \quad v'(0) = v'(L) = 0, \quad \bar{\theta}(0) = \bar{\theta}(L) = 0 \quad (14)$$

上式の境界条件を満足する各変位を次のように Fourier 級数に仮定する。

$$u(g) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi g/L, \quad \theta(g) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi g/L, \quad v(g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi g/L, \quad \bar{v}(g) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin n\pi g/L, \quad \bar{\theta}(g) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \sin n\pi g/L \quad (15)$$

上式を基礎方程式に代入して、Galerkin法を適用すれば、未定定数 $a_n \sim e_n$ を求めるための連立方程式をうるが、中央径間のみにて示せば次のとおりである。

$$\{EI_f \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + EA_k K_f + (2H_w + H_p + H_p) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\} a_n + \left\{-\frac{1}{2} (H_p - H_p) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + L_f^* \right\} b_n = -\frac{1}{L_f} [L_f + (H_p + H_p) \frac{g_f}{L_f}] + \frac{1}{2} (H_p - H_p) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a_n + \{EI_f \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + [GJ + GJ_w K_f + \frac{1}{2} (2H_w + H_p + H_p) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + EI_f K_f - M_k^*] b_n + [GJ + EI_f] K_f \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c_n - a_L c_n$$

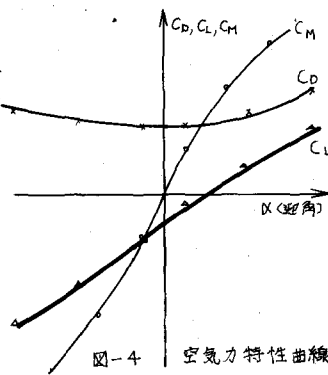


図-4 空気力特性曲線

$$= \{M_2 + \frac{1}{2}(H_{P1} - H_{P2})\frac{2L}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{m} dx \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \{ (GJ + EI_f) K_1 (\frac{2L}{\pi})^2 - b_n^* \} b_n + \{ EI_f (\frac{2L}{\pi})^2 + GJ K_1 (\frac{2L}{\pi})^2 \} c_n - L_2 c_n = \frac{4}{\pi} D_2 \\ & \{ (2H_{L1} + H_{P1} + H_{P2}) (\frac{2L}{\pi})^2 \} d_n - L_2 e_n = -\frac{4}{\pi} D_2 \\ & a b_n + c_n - d_n - \{ \bar{h} - 2(f + f^*) (\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2 \pi^2}) \} e_n = \frac{32(f + f^*)}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{m}{(m^2 - n^2)^2} e_m \end{aligned}$$

また、ケーブル方程式は式(20)から次のように表わされる。

$$\begin{aligned} H_{P1} &= \frac{E_s A_s}{L_s} \left\{ \frac{4f}{\pi L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n - \frac{1}{2} b_n) \right\} + \frac{32f_0}{\pi L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n - b_n) - \alpha_T \Delta T_T \\ H_{P2} &= \frac{E_s A_s}{L_s} \left\{ \frac{4f}{\pi L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + \frac{1}{2} b_n) \right\} + \frac{32f_0}{\pi L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + b_n) - \alpha_T \Delta T_T \end{aligned} \quad (21)$$

ここに、suffix- は側桁間に関するものである。

式(20)および(21)を同時に満足するように未定数 $a_n \sim e_n$ を決定しなければならぬが、式(20)に含まれる活荷重係数 K_1, K_2 が式(20)に示す補剛桁の変形によって定まるために、演算は適当な K_1, K_2 の初期値のもとに式(20)を解き、えられた結果から式(20)の K_1, K_2 の値を計算し、これらが合致する値を本題の解とする方法によった。なお、式(20)の係数項には未知数 K_1, K_2 の項が数多く含まれ、かつ荷重が変形に依存するために、計算値は初期値の大きさにきわめて敏感で、収束値をうけるのに多大な労力を要した。 $n=1.35$ の3項近似の場合の中央径間の補剛桁の鉛直、ねじりおよび水平変位を示せば、表-1のとおりである。

表-1 中央径間の鉛直、ねじり、水平変位

	誘導式 (キャンパー考慮)				誘導式 (キャンパー無視)				文献 (3)			
	$H_{P1} = -118$ (t)		$H_{P2} = -221$ (t)		$H_{P1} = -182$		$H_{P2} = -174$		$H_{P1} = -182$		$H_{P2} = -174$	
Z/L	鉛直 (mm)	ねじり (mm)	水平 (mm)	水平 (mm)	鉛直	ねじり	水平 (mm)	水平 (mm)	鉛直	ねじり	水平 (mm)	水平 (mm)
0.0	0.0	0.0 $\times 10^{-3}$	0.0	0.0	0.0	0.0 $\times 10^{-3}$	0.0	0.0	0.0	0.0 $\times 10^{-2}$	0.0	0.0
0.1	-0.027	-0.035	1.336	1.120	-0.028	0.019	1.348	1.130	-0.028	0.010	1.364	1.117
0.2	-0.049	-0.088	2.502	2.143	-0.051	0.020	2.525	2.164	-0.051	0.023	2.554	2.139
0.3	-0.063	-0.152	3.382	3.021	-0.067	0.003	3.414	3.051	-0.067	0.006	3.452	3.023
0.4	-0.071	-0.202	3.921	3.665	-0.077	-0.019	3.958	3.701	-0.077	-0.017	4.002	3.679
0.5	-0.074	-0.221	4.102	3.910	-0.080	-0.028	4.141	3.949	-0.080	-0.026	4.186	3.931

表-1のように風荷重が作用する場合には抗力による補剛桁およびケーブルの水平変位 u, v が卓越することがわかる。誘導した基礎方程式のキャンパーによる曲線を無視した結果は表-1に付記するとおり文献(3)の基礎方程式による結果とほぼ完全に合致することがわかる。キャンパーによる曲率の存在は補剛桁のねじりに影響を及ぼすことがわかる。表-2に最大断面力を示すが、キャンパーの影響ははりモーメントに現われているといえる。

本法における問題点、非連成法との比較および計算例に用いた吊橋のたわみや応力分布については講演時に別途資料を配布する予定である。

最後に、本研究は筆者の一人が長崎大学在学中に担当した卒業論の一部であるが、本研究を行なうにあたり、吊橋の基礎方程式を力の釣合条件式から誘導し、貴重で吊橋のデータをまとめられた日本道路公団開門架橋工事事務所古道氏、基礎方程式の誘導に際して的確な御助言を頂いた長崎大学築地助教授、吊橋の振れ挙動について御教示頂いた大阪大学小松教授、東京大学官田助教授ならびに本田公田林氏ならびに困難な数値解析を担当された卒業生中沖氏（現在神戸製鋼所構造研究所）に記して深く感謝する次第である。

参考文献 ① 平井敦他；鋼橋Ⅲ，技報堂，昭和42年，② 土木学会本州四国連絡橋上部構造研究小委員会解析分科会；本州四国連絡橋鋼上部構造に関する調査研究報告書 別刷6 吊橋のねじり解析，昭和48年3月，③ 日本道路公団開門建設所開門架橋工事事務所；風荷重を受ける吊橋の変形と応力，昭和45年6月，④ 倉西越後；吊橋の側方への変形について，土木学会第29回年次学術講演会講演摘要集第1部，PP383～384，昭和44年10月，⑤ K.Washizu；Some Considerations on a Naturally Curved and Twisted Slender Beam，J. Math. Phys., Vol. 43, No. 3, PP111～116，⑥ 望月谷他；板構造，建築構造学3，鹿島出版会，PP219～241，昭和44年8月。