

長崎大学工学部 正会員 崎山 毅

長崎大学工学部 正会員 ○栗原 和夫

1. まえがき 水圧荷重の作用を受ける円弧アーチの面内弾性安定問題に関しては、多くの理論的研究がなされ、実験的研究も行われてきている。著者の一人もさきの報告⁽¹⁾において、諸種の荷重に対する2ヒンジ円弧アーチの面内座屈特性を解析し、水圧荷重に対して、逆対称形の分岐座屈と同時に、限られた形状の2ヒンジ円弧アーチにおいて、対称形の屈曲あるいは飛躍とみられる座屈の存在しうることを理論的に明らかにした。

2ヒンジ円弧アーチの弾性安定性は変形した状態における力の平衡条件にもとづいて導かれた変形微分方程式により解析される。通常この微分方程式は非線形とよぶ。さきの報告において、この微分方程式の線形化された微分方程式を用いて座屈性状の解析が行われた。

本研究は円弧アーチの平衡状態を表す非線形連立微分方程式を摂動法により解析し、2ヒンジ円弧アーチの面内弾性安定性をより正確に明らかにし、さきの報告と比較することにより、微分方程式の線形化の解析結果にあらざる影響を検討しようとするものである。

2. 基礎方程式 円弧アーチの任意の微小部分に関する変形した状態での力の平衡条件は次の三式に与えられる。

$$\frac{dN}{ds} + \bar{Q} \left(\frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\theta}{ds} \right) - q = 0 \quad (1.a) \quad \frac{d\bar{Q}}{ds} - N \left(\frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\theta}{ds} \right) + p = 0 \quad (1.b) \quad \bar{Q} - \frac{dM}{ds} = 0 \quad (1.c)$$

ただし、 M , N , $\bar{Q}$ はそれぞれ円弧アーチの任意断面における弯矩、軸力、せん断力を表わす。 p および q は変形したアーチの軸線の法線および接線方向の分布荷重強度である。 α および θ はそれぞれ円弧アーチの中心角および任意点のねじり角を表わし、 S は変形したアーチの軸線に沿う座標である。

円弧アーチの任意の微小部分の変形前および変形後の弧長 ds_0 および ds は次式に与えられる。

$$ds_0 = R_0 d\alpha \quad (2.a) \quad ds = R(d\alpha + d\theta) \quad (2.b)$$

R_0 および R はそれぞれ円弧アーチの任意点における変形前および変形後の円半径を表わす。 R_0 と ds_0 と ds との間には同心軌の歪 ε とした次の関係が存在する。

$$ds = ds_0(1 + \varepsilon) \quad (3)$$

さらに、曲げモーメント M 、軸力 N 、ねじり角 θ 、および法線方向変位 $\bar{u}$ 、接線方向変位 $\bar{w}$ は次の各式に与えられる。

$$M = -EI \frac{d\theta}{ds} \quad (4.a) \quad N = -EA \varepsilon - \frac{\bar{M}}{R} \quad (4.b) \quad \sin \theta = \frac{1}{1 + \varepsilon} \left(\frac{d\bar{u}}{ds_0} + \frac{\bar{w}}{R_0} \right) \quad (4.c) \quad \cos \theta = \frac{1}{1 + \varepsilon} \left(1 + \frac{d\bar{w}}{ds} - \frac{\bar{u}}{R_0} \right) \quad (4.d)$$

断面力 M , N , $\bar{Q}$ および変形 $\bar{u}$, $\bar{w}$ に関する無次元量 M , N , Q および u , w を導入する。 L は円弧アーチの軸長を表わす。

$$M = -\frac{L}{EI} \bar{M} \quad N = -\frac{L}{EA} \bar{N} \quad Q = -\frac{L^2}{EI} \bar{Q} \quad u = \frac{\bar{u}}{L} \quad w = \frac{\bar{w}}{L}$$

無次元諸量 M, N, Q, u, w, θ および無次元変数 $\eta = \frac{S}{L}$ を用いて (1.a) ~ (1.c), (4.a) ~ (4.d) を書き直せば、 $1 + \varepsilon \neq 1$ とし

$$Q \frac{dN}{d\eta} + Q(\alpha + \frac{d\theta}{d\eta}) + \frac{QL^3}{EI} = 0 \quad (5.a) \quad \frac{dQ}{d\eta} - N(\alpha + \frac{d\theta}{d\eta}) - \frac{NL^3}{EI} = 0 \quad (5.b) \quad Q = \frac{dM}{d\eta} \quad (5.c) \quad M = \frac{dQ}{d\eta} \quad (5.d)$$

$$N = \varepsilon - \frac{d}{d\eta} M \quad (5.e) \quad Q = \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} + \frac{\partial^5}{\partial \eta^5} + \dots = \frac{d^4 u}{d\eta^4} + \alpha w \quad (5.f) \quad \varepsilon = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} + \dots = \frac{d^2 w}{d\eta^2} - \alpha u \quad (5.g) \quad \alpha = \frac{NL^2}{EI}$$

3. 逆対称変形 等分布水圧荷重 p を受ける円弧アーチの逆対称変形特性は次式に与えられる。摂動法を適用して

$$\frac{NL^3}{EI} = k_0^2 + \lambda^2 k_1^2 + \lambda^4 k_2^2 + \dots \quad (6.a) \quad M(\eta) = \lambda M_1(\eta) + \lambda^3 M_2(\eta) + \dots \quad (6.b)$$

$$N(\eta) = N_0 + \lambda N_1(\eta) + \lambda^2 N_2(\eta) + \dots \quad (6.c) \quad Q(\eta) = \lambda Q_1(\eta) + \lambda^3 Q_2(\eta) + \dots \quad (6.d)$$

振動助変数 λ を $Q(\omega)/2\pi$ に等しくとれば、境界条件 $M_i(\omega)=0$, $M_1(\frac{\omega}{2})=0$, $M_i(\omega)=0$ ($i=1,2,\dots$) および条件 $Q_1(\omega)=2\pi$, $Q_j(\omega)=0$ ($j=2,3,\dots$) より

$$\frac{K_2}{d} = 4\pi^2 - d^2, \quad \frac{K_1}{d} = 0, \quad \frac{K_3}{d} = \frac{3-8\pi^2}{4} - \frac{1+2\pi^2}{4\pi^2} d^2$$

とえる。これらの値を式(6.0)に代入すれば、2ヒンジ円弧アーチの逆対称変形特性を表わす曲線として次式とえらる。

$$\frac{PL^3}{dEI} = (4\pi^2 - d^2) + \left[\frac{3-8\pi^2}{4} - \frac{1+2\pi^2}{4\pi^2} d^2 \right] \lambda^2 + \dots \quad (7)$$

4. 対称変形 振動助変数 λ をとして、対称変形特性は次式にて表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{PL^3}{dEI} &= \lambda \frac{K_2}{d} + \lambda^2 \frac{K_3}{d} + \lambda^3 \frac{K_4}{d} + \dots \quad (8a), \quad u(\eta) = \lambda u_1(\eta) + \lambda^2 u_2(\eta) + \dots \quad (8b), \quad w(\eta) = \lambda w_1(\eta) + \lambda^2 w_2(\eta) + \dots \quad (8c) \\ \theta(\eta) &= \lambda \theta_1(\eta) + \lambda^2 \theta_2(\eta) + \dots \quad (8d), \quad M(\eta) = \lambda M_1(\eta) + \lambda^2 M_2(\eta) + \dots \quad (8e), \quad N(\eta) = \lambda N_1(\eta) + \lambda^2 N_2(\eta) + \dots \quad (8f), \quad Q(\eta) = \lambda Q_1(\eta) + \lambda^2 Q_2(\eta) + \dots \quad (8g) \end{aligned}$$

振動助変数 λ として $\theta(\omega)$ を用いれば、境界条件 $u_i(\omega)=0$, $w_i(\omega)=0$, $M_i(\omega)=0$, $u_{ii}(\omega)=0$, $w_{ii}(\omega)=0$, $M_{ii}(\omega)=0$ ($i=1,2,\dots$) および条件 $\theta_1(\omega)=1$, $\theta_j(\omega)=0$ ($j=2,3,\dots$) より定数 K_1^2 , K_2^2 , K_3^2 , ... が決定される。結果の1部を表-1, 2 に示す。

表-1 ($d=50$)

K_i^2/d	20	30	40	50	60
K_1^2/d	2.4286×10^2	3.0776×10^2	3.8505×10^2	4.6819×10^2	5.5525×10^2
K_2^2/d	-1.7656×10^2	-1.7213×10^2	-1.6577×10^2	-1.5730×10^2	-1.4650×10^2
K_3^2/d	3.3182×10^4	1.6411×10^4	8.3274×10^3	5.5295×10^3	2.5701×10^3

表-2 ($d=100$)

K_i^2/d	10	15	20	25	30
K_1^2/d	4.8636×10^2	6.1533×10^2	7.6767×10^2	9.2980×10^2	1.0973×10^3
K_2^2/d	-7.0782×10^2	-6.8979×10^2	-6.6439×10^2	-6.3146×10^2	-5.9078×10^2
K_3^2/d	2.6738×10^4	1.3440×10^4	7.1028×10^3	4.8965×10^3	3.2355×10^3

5. 弾性安定特性 2ヒンジ円弧アーチの水圧荷重に対する逆対称変形および対称変形特性を表わす $\frac{PL^3}{dEI} - \lambda$ 曲線を図-1 および図-2(a),(b)に示す。図-2 は限られた形状をもつアーチにおいて対称変形座屈の主値を示している。図-2 (a),(b)の横軸 $\theta(\omega)$ はアーチの支兵の片方み角を表わし、曲線は式(8.0)の λ の値が1

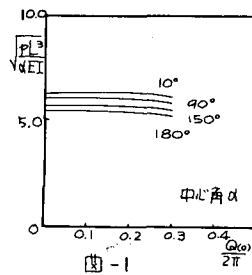


図-1

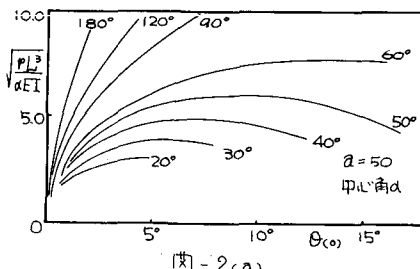


図-2(a)

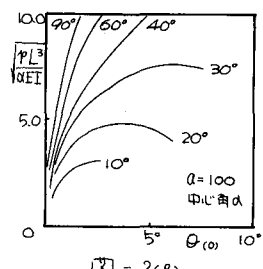


図-2(b)

項の値の10%に達したところまで描かれている。水圧荷重をうける2ヒンジ円弧アーチにおいて、対称型、逆対称型いずれの座屈もより小さな荷重において生じかねることを示すものが図-3である。これによれば中心角の小さなアーチにおいては、対称型の屈曲あるいは飛移り座屈が逆対称型の分岐座屈以前に生じかねることを理論的に明らかにできる。また、文献(1)の解析結果と比較すれば、非線形微分方程式の線形化は、逆対称座屈荷重の算定値には影響を与えないが、対称型の座屈荷重の算定値には大きな影響を及ぼし、座屈荷重をより大きく算定することになることがわかる。

(参考文献) (1) 嶋山毅, 2ヒンジ円弧アーチの面内座屈特性に関する研究, 土木学会論文報告集, NO.217, 1973

(2) Clive, L.D., Bifurcation Analysis for shallow Arches, EM2, ASCE, April, 1973

(3) Dickie, J. F., and Broughton, P., Stability Criteria for Shallow Arches, EM3, ASCE, June, 1971

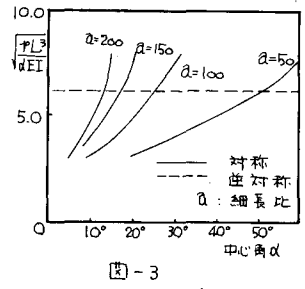


図-3