

九州産業大学 正会員 加納正道

九州産業大学 学生員 藤田修平

九州産業大学 学生員 古川弘幸

九州産業大学 学生員 山本一朗

1. まえがき

湾内や瀬などの海域の規模で汚染物質を追跡する場合に一般によくおこなわれる方法であるところの微分方程式を差分近似化し、数値計算する方法をそのまま適用すると種々の不合理が生じる。この不合理の原因の1つは微小距離であるはずの ΔS が大きいためであり、他の1つは連立方程式の解法にあることを知った。前者から生じる不合理には連続の条件で代表される水理学的矛盾と差分方程式の計算途上に生じる数値拡散誤差⁽¹⁾(Numerical dispersion)がある。ここではこれら3つの問題のうち、数値拡散誤差を検討し、拡散方程式を差分化し計算する段階でこれの定量化を考える。また移送項と拡散項(数値拡散項ではない自然拡散をさす)をも定量化し、数値拡散誤差とあわせて検討する。

2. 拡散方程式の差分化

i) 移送項と拡散項 流水中の任意の位置に認められる汚濁物質濃度は3次元領域で、水流による移送、拡散、沈殿および自己減衰の諸作用に影響され、次式で示される⁽²⁾。

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial(uC)}{\partial x} - \frac{\partial(vC)}{\partial y} - \frac{\partial(wC)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y \frac{\partial C}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z \frac{\partial C}{\partial z}\right) + W_0 \frac{\partial C}{\partial z} - \alpha C \quad (1)$$

ここで移送と拡散のみをとりあげまた簡単のため1次元とすればつぎのようになる

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(uC) + \frac{\partial}{\partial x}\left(D \frac{\partial C}{\partial x}\right) \quad (2) \quad \text{これを差分表示すれば}$$

$$C_i^{k+1} - C_i^k = \frac{\Delta t}{\Delta x} U \left\{ (1-\gamma) C_{i-1}^{k+\theta} - (1-2\gamma) C_i^{k+\theta} - \gamma C_{i+1}^{k+\theta} \right\} + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} D \left(C_{i-1}^{k+\theta} - 2C_i^{k+\theta} + C_{i+1}^{k+\theta} \right) \quad (3)$$

ここで $\theta = 0$ とすれば陽形式表示、 $\theta = 1$ とすれば陰形式表示であり、 $\gamma = 0$ とすれば後方差分、 $\gamma = 1$ で前方差分になる。このように種々の表示方式があるが、これらのうちのいずれの方式を用いてもそのままではいい結果はえられない。従ってこの報告では3次元領域を鉛直方向に積分することによって2次元領域とし、2次元の計算を行う⁽³⁾が安定な差分をえるために $U \geq 0$ のとき後方差分をとり、 $U < 0$ のとき前方差分をとる。また移送項に陽形式表示を採用し、⁽⁴⁾拡散項に陰形式表示を採用する。

ii) 数値拡散誤差

中心を i 地点にもつ図-1(a)に示す Δx の幅の矩形濃度分布を考える。移送だけを考えれば流速 U によって、下流に $U\Delta t$ だけ平行移動して同図-1(b)になるはずであるが、数値計算を行うときには濃度を Δx 間隔の位置でしか与えられないので同図-1(c)のような形で表わすことになる。この操作をくり返すと拡散は起つていないのに計算上は非常に拡散が進んでしまうこれを数値拡散誤差とよぶ。この数値拡散誤差はあたかも拡散係数

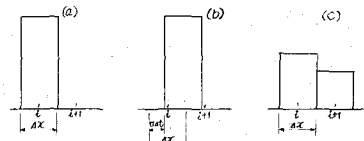


図-1

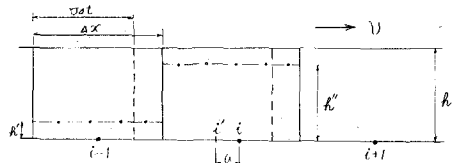


図-2

を大きくしたと同じような計算誤差としてあらわれる。この誤差を拡散係数の形で表わしたものを数値拡散係数という。この誤差の補正を行うとすれば条件として与える拡散係数から数値拡散係数をあらかじめ差引いておけば正しい計算結果が得られる。すなわち $D' = D - D_N$ とする。

そして D_N を次のようにして求める。すなわち図-2は(1)流速 $U \geq 0$, $U\Delta t < \Delta x$ の場合、 n 時刻に $i-1$ に濃度の中にある状態で Δt 時間後に $U\Delta t$ だけ移動した図である。

n 時刻における $(i-1)$ 区間の濃度は

$$C_{i-1}^* = \Delta x \cdot n$$

$(n+1)$ 時刻における $(i-1)$ 区間の濃度

$$C_{i-1}^{*+1} = n(\Delta x - U\Delta t) = n' \cdot \Delta x$$

n 時刻における i 区間の濃度は

$$C_i^* = 0$$

$(n+1)$ 時刻における i 区間の濃度

$$C_i^{*+1} = n \cdot U\Delta t = \Delta x \cdot n' = \Delta x(n - n')$$

実際には i 区間の濃度の中心は i であるが、計算上 i 点を中心とするために i が i に移動することになる。

移動距離 $(\Delta) = \frac{1}{2}(\Delta x - U\Delta t)$ また $D \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ の次元は 1 であるから D の次元は $\frac{\Delta x^2}{\Delta t}$

また D の次元は $(\Delta x - U\Delta t) \cdot \beta$ より $\frac{\Delta x^2}{\Delta t} = (\Delta x - U\Delta t) \cdot \beta \therefore \beta = \frac{\Delta x^2}{\Delta t(\Delta x - U\Delta t)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = U$

$U \geq 0$ より $D_N = \frac{1}{2}(\Delta x - U\Delta t) \times U = \frac{U\Delta x}{2} \left(1 - \frac{U\Delta t}{\Delta x}\right)$ が得られる。

(2) 流速 $U < 0$, $U\Delta t < \Delta x$ の場合も n 時刻に $i+1$ 区間に濃度を与えることによって上記と同様にして、 $\beta = U$ が求まり 移動距離 $(\Delta) = -\frac{\Delta x + U\Delta t}{2}$ となり

$$D_N = -\frac{(\Delta x + U\Delta t)}{2} \times U = -\frac{U\Delta x}{2} - \frac{U^2\Delta t}{2} = -\frac{U\Delta x}{2} \left(1 + \frac{U\Delta t}{\Delta x}\right) \text{ が得られる。}$$

(1), (2) をまとめれば

$$D_N = (-1)^m \frac{U\Delta x}{2} - \frac{U^2\Delta t}{2} \quad \dots \begin{cases} U \geq 0 \text{ のとき } m = 2n \\ U < 0 \text{ のとき } m = 2n + 1 \end{cases}$$

$$\text{さらに } D_N = \frac{|U|}{2} \Delta x - \frac{U^2}{2} \Delta t \quad (4)$$

3. 数値計算方法と結果

i) 汚染物質追跡の計算 図-3 フローチャートと同ページに記載したプログラムを使用して図-4に示すような宮崎県延岡市近傍海域の数値計算を行った。そのときの初期濃度分布と 10 ステップ経過後の濃度分布をそれぞれ図-5と図-6に示す。この計算には拡散項、数値拡散項に陰形式表示を移送項には陽形式表示を使用し、連立 1 次方程式を作成し、解法としてガウス-ジョルダンの消去法を使用した。

ii) 拡散項、数値拡散項として移送項の比較 図-4中に①, ②, ... ⑤で示す位置で計算した結果を表-1に示す。(2) 式の D を $(D - D_N)$ で補正して次式をうる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} = (D - D_N) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + U \frac{\partial C}{\partial x} \quad (5)$$

陽形式で差分化すると

$$\frac{C_i^{*+1} - C_i^*}{\Delta t} = (D_i - D_{Ni}) \frac{1}{\Delta x^2} (C_{i+1}^* - 2C_i^* + C_{i-1}^*) + U_i \frac{C_{i+1}^* - C_i^*}{\Delta x}$$

$$\text{さらに } C_i^{*+1} - C_i^* = D_i \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (C_{i+1}^* - 2C_i^* + C_{i-1}^*) - D_{Ni} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (C_{i+1}^* - 2C_i^* + C_{i-1}^*) + U_i \frac{\Delta t}{\Delta x} (C_{i+1}^* - C_i^*) \quad (6)$$

ここに拡散係数 D_i と流速 U_i は場所 (i) によりきまる。また数値拡散係数 D_{Ni} は (4) 式を再記すると $D_{Ni} = \frac{1}{2} \cdot |U_i| \cdot \Delta x - \frac{1}{2} (U_i)^2 \cdot \Delta t$ でありやはり場所によってきまる。そして Δx と Δt は計算モデルで 1 定値

```

C      WAN NAI NO KAKUSAN KEJSAN
      DIMENSION U(21,24),DN(21,24),V(21,24),E
      +N(21,24),D(21,24),B1(21,24),B2(21,24),A
      +A(19,20),S(21,24),A1(21,24),BB(22,23),A
      +2(21,24)
      READ(5,1)U,V,D,S,DN,EN,B1,B2
1  FORMAT(7F10.0)
      LL=0
      DO 4 L=1,1000
      LL=LL+1
      DO 5 J=1,20
      DO 5 I=1,19
      AA(I,J)=0.0
5  CONTINUE
      DO 6 J=2,23
      DO 6 I=2,20
      IF(U(I,J))8,7,7
7  A1(I,J)=S(I,J)+1.2*U(I,J)*(S(I-1,J)-S(I
      +,J))
      GO TO 6
8  A1(I,J)=S(I,J)+1.2*U(I,J)*(S(I,J)-S(I+1
      +,J))
6  CONTINUE
      DO 9 J=2,23
      I=2
      AA(1,1)=2.0*B1(I,J)+1.0
      AA(1,2)=-B1(I,J)
      AA(1,20)=A1(I,J)+B1(I,J)*S(I,J)
18  I=I+1
      IF(J.LT.14.OR.J.GT.16)73,76
76  IF(I.LT.16.OR.I.GT.18)73,78
78  IF(J=14)73,80,71
71  IF(J=15)73,85,72
72  IF(J=16)73,90,73
80  IF(I=17)73,16,81
81  IF(I=18)73,14,73
85  IF(I=17)73,16,86
86  IF(I=18)73,15,73
90  IF(I=16)73,16,91
91  IF(I=17)73,15,73
73  IF(I=20)10,10,11
10  IF(S(I-1,J))100,12,13
12  IF(S(I+1,J))100,14,15
13  IF(S(I+1,J))100,16,17
14  AA(I-1,I-1)=1.0
      AA(I-1,20)=A1(I,J)
      GO TO 18
15  AA(I-1,I-1)=2.0*B1(I,J)+1.0
      AA(I-1,I)=-B1(I,J)
      AA(I-1,20)=A1(I,J)
      GO TO 18
16  AA(I-1,I-2)=-B1(I,J)
      AA(I-1,I-1)=2.0*B1(I,J)+1.0
      AA(I-1,20)=A1(I,J)
      GO TO 18
17  AA(I-1,I-2)=-B1(I,J)
      AA(I-1,I-1)=2.0*B1(I,J)+1.0
      AA(I-1,I)=-B1(I,J)
      AA(I-1,20)=A1(I,J)
      GO TO 18
11  DO 19 NN=1,19
      IP=NN
      JP=NN
      K1=19
      K2=20
      CALL SWEEPX(AA,K1,K2,IP,JP)
19  CONTINUE
      DO 20 I=2,20
      S(I,J)=AA(I-1,20)
20  CONTINUE
9  CONTINUE
      DO 21 J=1,23
      DO 21 I=1,22
      BB(I,J)=0.0
21  CONTINUE
      DO 22 I=2,20
      DO 22 J=2,23
      IF(V(I,J))24,23,23
23  A2(I,J)=S(I,J)+1.2*V(I,J)*(S(I,J-1)-S(I
      +,J))

```

```

      GO TO 22
24  A2(I,J)=S(I,J)+1.2*V(I,J)*(S(I,J)-S(I
      +,J+1))
22  CONTINUE
      DO 25 I=2,20
      J=2
      BB(1,1)=2.0*B2(I,J)+1.0
      BB(1,2)=-B2(I,J)
      BB(1,23)=A2(I,J)+B2(I,J)*S(I,1)
34  J=J+1
      IF(J=23)26,26,27
26  IF(S(I,J-1))100,28,29
28  IF(S(I,J+1))100,30,31
29  IF(S(I,J+1))100,32,33
30  BB(J-1,J-1)=1.0
      BB(J-1,23)=A2(I,J)
      GO TO 34
31  BB(J-1,J-1)=2.0*B2(I,J)+1.0
      BB(J-1,J)=-B2(I,J)
      BB(J-1,23)=A2(I,J)
      GO TO 34
32  BB(J-1,J-2)=-B2(I,J)
      BB(J-1,J-1)=2.0*B2(I,J)+1.0
      BB(J-1,23)=A2(I,J)
      GO TO 34
33  BB(J-1,J-2)=-B2(I,J)
      BB(J-1,J-1)=2.0*B2(I,J)+1.0
      BB(J-1,J)=-B2(I,J)
      BB(J-1,23)=A2(I,J)
      GO TO 34
27  DO 35 MM=1,22
      IP=MM
      JP=MM
      KK1=22
      KK2=23
      CALL SWEEPY(BB,KK1,KK2,IP,JP)
35  CONTINUE
      DO 36 J=2,23
      S(I,J)=BB(J-1,23)
36  CONTINUE
25  CONTINUE
      WRITE(6,37)LL,S
37  FORMAT(1H1,60X,3HLL=,I5,/,/,24(11F11.5/
      +/,10F11.5//,/,2/))
      GO TO 4
100 WRITE(6,38)I,J,S
38  FORMAT(1H0,2H=,I5,4H J=,I5//,24(11F1
      +1F11.5//,10F11.5//,2/))
      GO TO 110
4  CONTINUE
110 STOP
      END

```

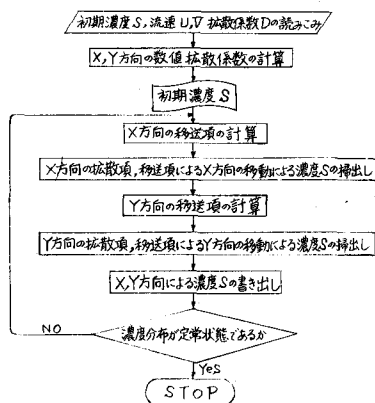


図-3 フローチャート

をもち、濃度差 $(C_{in}^* - 2C_i^* + C_{i-1}^*)$ と $(C_{in}^* - C_i^*)$ は場所と時刻 (t) で与えられるから、(6) 式の右辺の拡散項、数値拡散項と移送項が場所 (i) と時刻 (t) で定量化できる。表-1 にステップ $\Delta t = 10$ における①、②、・・・⑦ (図-4 中に記入) メッシュにおける上記3項の計算値を示す。そして右端が3個の欄に移送項から数値拡散項をひいた差 (真の移送項である) と、数値拡散項を移送項で割った商、そして拡散項を移送項で割った商をそれぞれ記入した。数値拡散項と移送項の比は変動幅 3.0% ~ 1970% と大きく、数値拡散誤差が拡散方程式を差分化した数値計算に大きな要素をしめることが実証できた。

参考文献

- (1) “拡散方程式の数値計算方法の紹介”
村上建；下水道協会誌 Vol.9 No.100 1972
- (2) “流水中における汚濁物質の希釈とその機構”
南部祥一；用水と废水 Vol.5 No.1
- (3) “福岡湾の汚染物質追跡モデルについて”
加納正道；九州産業大学工学部研究報告 第10号 1973
- (4) “数値計算の応用と基礎” 伊藤剛；アテネ出版
- (5) “数値計算” 赤坂隆；コロナ社

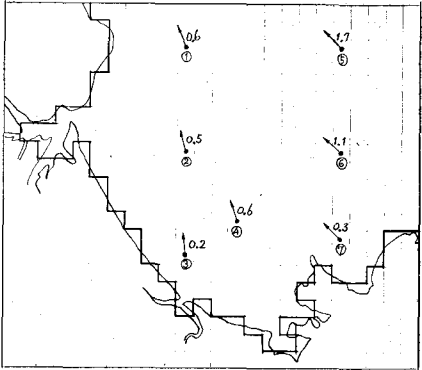


図-4 ● 流域中の位置
↑ 流向および流速 m/sec
○ メッシュ番号

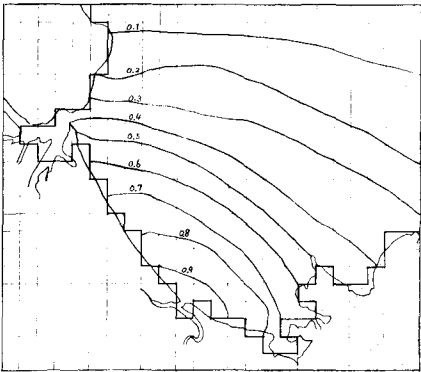


図-5

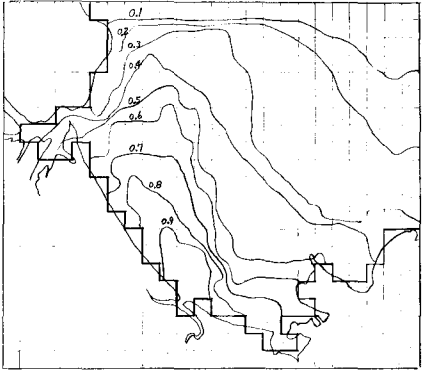


図-6

表-1 拡散項、数値拡散項、移送項の比較

海防番号	D	D_N	拡散項	数値拡散項	移送項	移送項-数値拡散項	数値拡散項/移送項	拡散項/移送項
4	3.50	52.1	0.00010 0.00035	0.00157 0.0526	0.0237 -0.00266	0.0221 -0.0532	6.6 (%) 1970.0	0.42 (%) 13.2
1	2.50	52.1	0.00064 0.00020	0.0135 0.0421	0.0237 -0.00266	0.0102 -0.0448	57.0 1580.0	2.7 7.6
3	1.50	36.7	-0.000020 -0.00023	-0.000497 -0.0567	-0.00172 -0.00298	0.00112 0.0550	28.9 1900.0	1.2 7.8
5	7.00	-132.0	0.0000870 0.0000590	-0.00165 -0.00112	-0.0414 -0.0378	0.0430 -0.0367	4.0 3.0	0.2 0.16
2	3.00	51.2	-0.0000300 -0.00117	-0.00137 -0.0201	0.0211 -0.0395	0.0224 -0.0194	6.9 50.9	0.4 3.0
6	4.00	12.5	-0.0000210 -0.0000150	-0.0000110 -0.0000570	-0.0000250 -0.0000240	0.0000380 0.0000310	236.0 238.0	95.0 75.0
7	1.50	36.7	-0.000174 -0.000495	-0.00425 -0.0233	-0.0139 -0.0115	0.0251 0.0111	306.0 201.0	1.3 8.2