Ⅲ－21　自由地下水面をもつ帯状領域内の円形暗きょの取水量について

九州大学　正会員　上田年比古

九州産業大学　正会員　○杉尾　哲

1、まえがき

円形暗きょが、自由地下水面と水平な不透水層とで挟まれた、横方向に無限の，均一な透水性をもつ浸透層中に1個ある場合について考えよう。従来の暗きょ水理の研究ではこの境界条件の場合を取り扱ったものが最も多いが，それらは，たとえば暗きょ付近の流れは求心的であるなどと，流れの状態を簡略化して求めた近似解であり、算定結果の精度は疑問視されていた。本研究はこの近似解析誤差を取り除くためにHodograph法を用いた解析を行ない，暗きょ取水量と自由地下水面形状の厳密解を求めたものである。

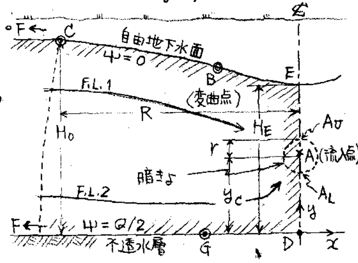

図-1　z平面

2．Hodograph法による解析

x方向およびy方向の流速をu，vとするとき $U=u-iv$ ….(1) で表わされる平面：ホドグラフ平面を考えると，$\Phi=ky$，$\Psi=0$ の自由地下水面上（接線方向を s）では $\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=k\frac{\partial y}{\partial s}$，$\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=0$ ….(2) であり，両式より $\frac{\partial x}{\partial s}$ を消去して $u=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-\frac{\partial\Psi}{\partial y}$，$v=-\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ ….(3) を代入すると $u^2+\left(v+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}$ ….(4) をうる。したがってホドグラフ平面は自由地下水面を円で示すことになる。これより図-1のz平面のホドグラフ平面を求めると図-2のようになる。次いで $k/U=U'=u'+iv'=k(u+iv)/(u^2+v^2)$ ….(5) の写像を行なうと式-4,5より $v'=-1$ となるから式-4の円は $v'=-1$ の直線で示され、図-3がえられる。また図-3はSchwarz-Christoffelの変換により図-4に写像される。このとき写像関数は

$$U'=M\int\frac{\zeta(\zeta-m)}{\sqrt{(\zeta-n)^3}(\zeta-1)}d\zeta=2M\left\{\sqrt{\zeta-n}-\frac{n(m-n)}{(1-n)\sqrt{\zeta-n}}-\frac{1-m}{2\sqrt{(1-n)^3}}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{1-n}+\sqrt{\zeta-n}}{\sqrt{1-n}-\sqrt{\zeta-n}}\right|\right\}+C_1+iC_2 \quad \cdots(6)$$

で書わされる。ここにM，C_1，C_2 の値は式-6を実数部と虚数部にわけた式において，DGF区間で $v'=0$，EAD区間で $u'=0$，EBF区間で $v'=-1$ の境界条件を代入することにより $M=\sqrt{(1-n)^3}/(m-1)/\pi$，$C_1=0$，$C_2=-1$ と決定される。また図-4は流入流出点間のポテンシャル流であり，複素ポテンシャルは次式で与えられる。

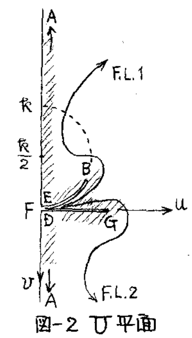

図-2　U平面

$$W=\Phi+i\Psi=\frac{Q}{2\pi}\ln\frac{\zeta-a}{\zeta-1}+\mu' \quad \cdots(7)$$

ここに図-1のE点（$\xi=n$，$\eta=0$）の高さを $y=H_E$ とおくと $\Phi=kH_E$，$\Psi=0$ であるから式-7より $\mu'=kH_E-\frac{Q}{2\pi}\ln\left|\frac{n-a}{n-1}\right|$ と決定される。

次に式-5から $-\frac{k}{U}=-U'=\frac{dW}{dz}=\frac{dW}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz}$ であり，これを変形すると $\frac{dz}{d\zeta}=-\frac{U'}{k}\frac{dW}{d\zeta}$ ….(8) がえられる。したがって式-8に式-6,7を代入すると

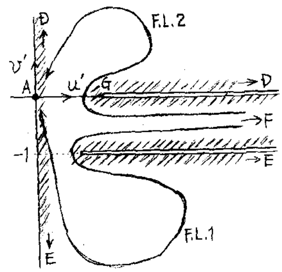

図-3　U'平面

$$z=\frac{Q}{2\pi k}\int\frac{1-a}{(\zeta-a)(\zeta-1)}\left[\frac{2\sqrt{(1-n)^3}}{(m-1)\pi}\left\{\sqrt{\zeta-n}-\frac{n(m-n)}{(1-n)\sqrt{\zeta-n}}+\frac{m-1}{2\sqrt{(1-n)^3}}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{1-n}+\sqrt{\zeta-n}}{\sqrt{1-n}-\sqrt{\zeta-n}}\right|\right\}-i\right]d\zeta \quad \cdots(9)$$

がえられ，これを式-7と連立させればζ平面を媒介としてz平面とW平面との対応がつくから図-1の流れを解くことができる。

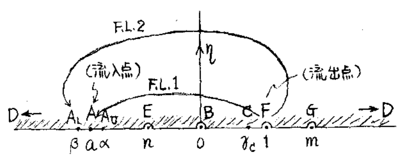

図-4　ζ平面

3、暗きょ取水量と自由地下水面

以上の解析結果に各点の境界条件を与えて、暗きょ取水量および自由地下水面形状の算定式を導いてみよう。まず地下水面の最低点Eについて考えよう。ここにζ平面上のE点およびD点はξ軸上にあるから $z(E)-z(D)=iH_E$ は式-9をξ軸に沿って $-\infty \leqq \xi \leqq n$ の区間で積分した値で与えられる。いま式-9の被積分関数を $F(\zeta)$ とおくと、積分区間に特異点A（$\xi=a$）を含むから、A点の留数 $\mathrm{Res}\,F(a)$ を考えて $iH_E=\int_{-\infty}^{n} F(\zeta)_{\eta=0}\,d\zeta-\pi i\,\mathrm{Res}\,F(a)$ となり、この積分結果を整理すると、実数部と虚数部からそれぞれ次式をうる。

$$\frac{2\sqrt{(1-n)^3}}{m-1}\left\{\sqrt{n-a}+\frac{n(m-n)}{(1-n)\sqrt{n-a}}\right\}+2\tan^{-1}\sqrt{\frac{n-a}{1-n}}-\pi=0 \quad \cdots\cdots (11)$$

$$H_E=\frac{Q}{\pi k}\left[\frac{\sqrt{(1-n)^3}}{m-1}\left\{\sqrt{1-n}-\frac{n(m-n)}{\sqrt{(1-n)^3}}\right\}+\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-a}{n-a}\right|\right] \quad \cdots\cdots (12)$$

次に暗きょ周壁の下端 A_L（$y=y_c-r,\ \xi=\beta<a$）の場合、$-\infty \leqq \xi \leqq \beta$ の区間で積分すると

$$y_c-r=\frac{Q}{\pi k}\left[\frac{\sqrt{(1-n)^3}}{(m-1)\pi}\left\{\left(2\sqrt{1-n}-\frac{2n(m-n)}{\sqrt{(1-n)^3}}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\sqrt{\frac{n-\beta}{1-n}}\right)+\left(\sqrt{n-a}+\frac{n(m-n)}{(1-n)\sqrt{n-a}}\right)\ln\left|\frac{\sqrt{n-a}+\sqrt{n-\beta}}{\sqrt{n-a}-\sqrt{n-\beta}}\right|\right\}+\frac{1-a}{\pi}\int_0^{1/\sqrt{n-\beta}}\frac{2t\cot^{-1}\left(\frac{1}{t\sqrt{1-n}}\right)}{\{(n-a)t^2-1\}\{(1-n)t^2+1\}}dt\right] \cdots (13)$$

また $\Phi=kH_A$ であることから式-7より $kH_A=\frac{Q}{2\pi}\cdot\ln\left|\frac{\beta-a}{\beta-1}\cdot\frac{n-1}{n-a}\right|+kH_E \quad \cdots\cdots (14)$

暗きょ周壁の上端 A_U（$y=y_c+r,\ \xi=\alpha>a$）の場合は特異点をさけるため $i(y_c+r)=iH_E-\{z(E)-z(A_U)\}$ と考え、積分は $\alpha \leqq \xi \leqq n$ の区間で行なう。

$$y_c+r=H_E-\frac{Q}{\pi k}\left[\frac{\sqrt{(1-n)^3}}{(m-1)\pi}\left\{\left(2\sqrt{1-n}-\frac{2n(m-n)}{\sqrt{(1-n)^3}}\right)\cdot\tan^{-1}\sqrt{\frac{n-\alpha}{1-n}}-\left(\sqrt{n-a}+\frac{n(m-n)}{(1-n)\sqrt{n-a}}\right)\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{n-a}+\sqrt{n-\alpha}}{\sqrt{n-a}-\sqrt{n-\alpha}}\right|\right\}+\frac{1-a}{\pi}\int_0^{\sqrt{n-a}}\frac{2t\cdot\cot^{-1}\frac{t}{\sqrt{1-n}}}{(n-a-t^2)(1-n+t^2)}dt\right] \cdots\cdots (15)$$

また A_U 点も $\Phi=kH_A$ であることから $kH_A=\frac{Q}{2\pi}\ln\left|\frac{\alpha-a}{\alpha-1}\frac{n-1}{n-a}\right|+kH_E$ が成り立ち、式-14と連立させると

$\alpha=\{2a-(1+a)\beta\}/(1+a-2\beta) \quad \cdots\cdots (16)$ をうる。

次に自由地下水面上の任意の位置N（$\xi=\gamma$）を考え、$n \leqq \xi \leqq \gamma$ の区間で積分すると実数部と虚数部より

$$-x=\frac{Q}{\pi k}\frac{\sqrt{(1-n)^3}}{(m-1)\pi}\left[\left\{2\sqrt{n-a}+\frac{2n(m-n)}{(1-n)\sqrt{n-a}}\right\}\cdot\tan^{-1}\sqrt{\frac{\gamma-n}{n-a}}+\left\{\frac{n(m-n)}{\sqrt{(1-n)^3}}-\sqrt{1-n}\right\}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{1-n}+\sqrt{\gamma-n}}{\sqrt{1-n}-\sqrt{\gamma-n}}\right|\right]+\frac{Q}{2\pi k}\frac{1-a}{\pi}\int_n^{\gamma}\frac{1}{(\xi-a)(\xi-1)}\ln\left|\frac{\sqrt{1-n}+\sqrt{\xi-n}}{\sqrt{1-n}-\sqrt{\xi-n}}\right|d\xi \cdots (17)$$

$$y=\frac{Q}{2\pi k}\cdot\ln\left|\frac{\gamma-a}{\gamma-1}\frac{n-1}{n-a}\right|+H_E \quad \cdots\cdots (18)$$

がえられる。すなわちこの式-17,18 が自由地下水面形状の算定式であり、式-18に $y=H_0$ とおいてえられるγの値をγ_cとすれば、自由地下水面の位置 x, y は式-17,18 のγの値を $n\sim\gamma_c$ の範囲で適宜変化させて算出することにより求まる。またγ_cの値を式-17に代入して求まる値は、自由地下水面がもとの地下水面に回復するまでの距離Rである。以上の式-11～16，17（$\gamma=\gamma_c$），18（$\gamma=\gamma_c$）の8式が暗きょ取水量Qの算定式であり、与えられた境界条件 H_A, r, R, y_c, H_0 について8式を連立させて解くと取水量Qと地下水面の最低点の高さ H_E が求まる。

4．Hele-Shaw モデル実験

図-5，6 に Hele-Shaw モデル実験によって求めた暗きょ取水量と自由地下水面を計算結果と比較している。

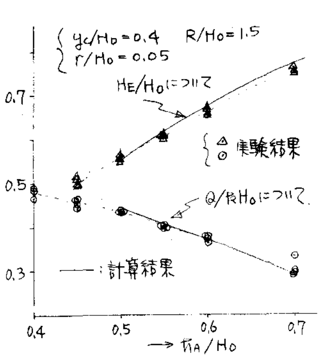

図-5 Q/kH_0, H_E/H_0の検討

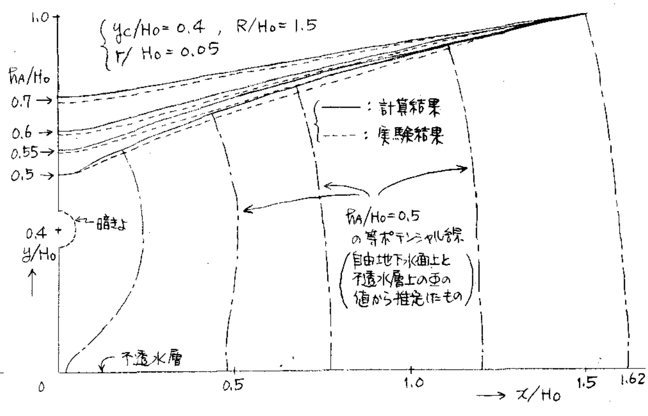

図-6 自由地下水面形状の検討