II－17　骨組の弾塑性非線解析の一手法について

九州大学　正員　　樗木武
○九州大学　学生員　山本修司

まえがき

一般に組合せ応力をうける骨組の弾塑性解析は応力の相関関係が非線形となることが多く，解析がどうしても，複雑になる。本稿は文献1，2等にみられる塑性流れ理論に基づく剛性マトリックスを使用し，降伏断面が発生した以後の非線形な応力～ひずみ関係を線形近似する一手法を述べるものである。主な仮定は，1　荷重は比例荷重とする。2　材料は完全弾塑性体とする。3　材料の応力～ひずみ関係は時間に独立とし，塑性流動理論における応力速度増分とひずみ速度増分との関係を応力増分とひずみ増分との関係におきかえる。

基礎式

構造物の部材に全断面降伏が生じる条件は，その部材の降伏関数をFとすると$F=0$であり，歪硬化がないものとすれば，それ以後の塑性変形に対しては$\delta F=0$となり，除荷が生じれば$\delta F<0$となることは周知のとおりである。塑性流動理論に基づく，材端に塑性関節を持つ部材の剛性マトリックスは文献1，3に詳しく誘導されているので簡単に記すと次式で与えられる。

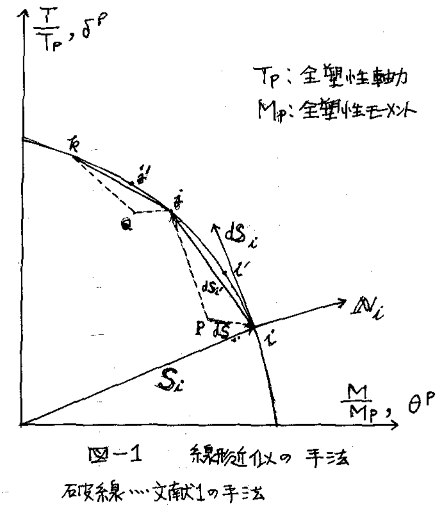
$$\{\mathbb{R}\}=\left[\{\mathbb{K}_E\}+\{\mathbb{K}_{op}\}\right]\cdot\{\mathbb{U}\}=\{\mathbb{K}_p\}\{\mathbb{U}\}$$

ここに$\{\mathbb{K}_E\}$は弾性の場合の通常の剛性マトリックスであり，$\{\mathbb{K}_{op}\}$が塑性の影響をあらわすマトリックスである。弾性範囲では$\{\mathbb{K}_{op}\}=\mathbf{0}$であるが，降伏端が生ずると$\{\mathbb{K}_{op}\}$の要素は$\left\{\frac{\partial F}{\partial R}\right\}$を含むため，$F$が線形でないかぎり，$\{\mathbb{K}_{op}\}$は応力の関数となり，非線形となる。そのため数値計算では何らかの線形近似が必要である。従来の方法としては，増分法を用いた解析において，降伏端が発生した後の微少荷重増分に対して$\left\{\frac{\partial F}{\partial R}\right\}$は変化しないとする方法があるが，これでは，一度降伏した点の応力が降伏曲線の外へと離れていき誤差の大きくなる恐れがある。また降伏曲線を始めから多角形で近似する方法もあるが，高次の多角形になると計算においての場合分けが多くなり，プログラムがめんどうになる。また文献1，2に見られる線形近似の手法もある。

線形近似の手法について

軸力とモーメントの相関曲線を用いて説明する。

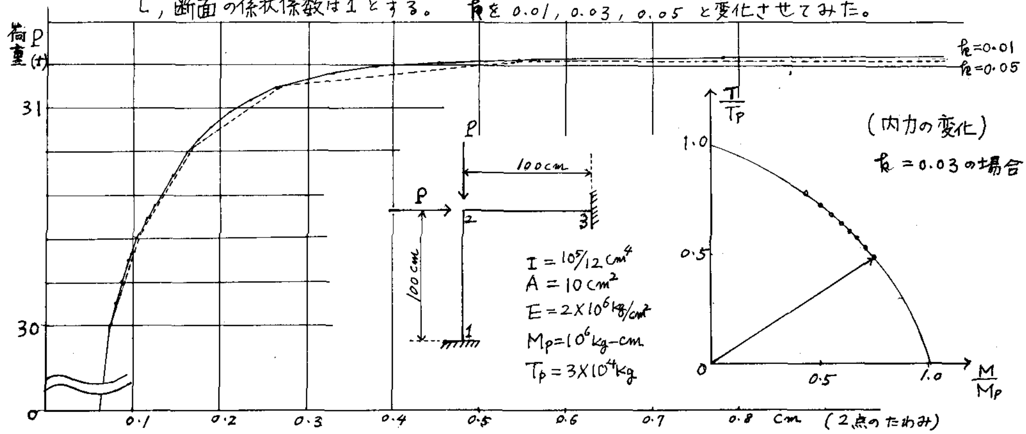
荷重を増加していくと，ある材端が，全断面降伏しi点に達する。それ以後の変形の増加の方向は，法線方向であり，応力の増加の方向は接線方向である。降伏線上では，応力増分ベクトルを$d\mathbb{S}_i$，法線方向ベクトルを$\mathbb{N}_i$とすると，$\mathbb{N}_i^t\cdot d\mathbb{S}_i=0$が成立する。文献1，2の手法は，あらかじめ定められたλによって，$\mathbb{N}_i^t\cdot\overline{d\mathbb{S}_i}=-\lambda$に従がって，応力ベクトル$\mathbb{S}_i$を降伏曲線の内側$P$まで移動させる。降伏後の荷重増分に対して，$i$点の応力増分ベクトルは$i$点における接線に平行な直線$Pj$に従がって変化する。この方法では上記のベクトル移動とそれに伴なう不つり合い量の修正が必要となる。筆者らは，より簡単な線形近似の方法を提案するものである。次のように行なう。曲線にそって計算することは困難なので二の曲線を内接する折線で近似することにする。



図－1　線形近似の手法
破線…文献1の手法
実線…本法

降伏曲線は応力のない状態の原点を内部に持つ外に凸な関数である事と，剛性マトリックス $[K_p]$ は i 点における応力の増分の方向を示していると考えられるので，i 点の極く近傍の i' 点における応力を用いて $[K_{op}]$ に含まれる $\left\{\frac{\partial F}{\partial R}\right\}$ を計算すれば，全断面降伏した部材の応力は，以後 i 点より i' 点の接線の傾きをもって，降伏曲線の内側をとおり，再び降伏曲線と交わる。言いかえれば曲線 ii' 間を直線 ii' でおきかえたことになり，i' 点を i 点に十分近くとれば，解は下界より正解に収束する。また ii' 間では $N^{t}\cdot dS=0$ の条件を ii' 間の平均的な値 $N_{i'}^{t}\cdot dS_{i'}=0$ で代表する事になる。i' 点の選点に際して，応力の増加の方向があきらかな場合には，$(T_{i'}-T_i)/T_i=k$ で求まる，$T_{i'}=(1+k)T_i$ なる軸力の点を選べばよい。応力の増加の方向がはっきりしない場合，たとえば曲げとねじりの相関関係の場合などでは i 点における剛性マトリックスを用いて，応力の増分 dS_i を求めその増加の方向を知ればよい。方向がわかれば同様に i' 点を定めれば良い。k は移動の程度をあらわす量であり数パーセント程度でよい。j 点，k 点についても同様に計算を行なっていくと，十分な塑性関節ができて崩壊するか，十分の塑性関節ができなくとも構造の安定性の低下をきたして崩壊することになる。これらは剛性マトリックスの Determinant の正負によって判定される。

計算例　高軸力をうける簡単な骨組について解析する。降伏関数として $F=\left(\frac{T}{T_p}\right)^2+\left(\frac{M}{M_p}\right)-1$ を採用し，断面の係状係数は1とする。k を 0.01，0.03，0.05 と変化させてみた。



【考　察】　文献1の線形近似とくらべて，ほぼ同じくりかえし回数で 崩壊荷重 31.24～31.26トン を得られほぼ同じ結果となったが，本稿の線形近似の特色として次の事があげられる。

1，文献1の手法にくらべて，ベクトル移動，及びそれに伴なう不つり合い量の修正が必要ないので，その分だけ計算手順が簡単となる。

2，荷重～たわみ曲線もより自然な形で求められる。

3，始めから多角形で降伏関数を近似することなく，計算の各段階で自動的に折線近似できる。

4，降伏関数が曲面を構成する場合（たとえば二軸曲げとねじりを考慮した降伏曲面）には，本手法をそのまま適用することは困難であり，何らかの工夫が必要となる。

参考文献

1　星治雄，児嶋弘行，平尾潔：軸力の影響を考慮した平面剛滑節構造物の一自動弾塑性解析　土木学会論文集　第202号，1972年，6月

2　Glenn A. Morris and Steven J. Fenves : Elastic-Plastic Analysis of Frame works, J of St. Div. Proc. A.S.C.E, VoL 96 May 1970.

3　上田幸雄 他　マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析　日本造船学会論文集 第124号（1968年，12月），第126号（1969年，12月）