II－15　薄肉断面曲線はりの座屈に関する基礎方程式

正　長崎大学　築地恒夫

初期曲率，ねじれ率を有する立体曲線はりの座屈に関する一般式を，仮想仕事の原理より導く。外力のなす仕事は，初期応力の概念[2]を用いて数学的に算出する[3]。ここで対象とする曲線はりは，一定の曲率 $1/R$，ねじれ率 K_ζ を有する薄肉開き断面のはりである。断面の最大寸法を a とすると，$a/R \ll 1$，$aK_\zeta \ll 1$ である。

座標軸は図のように，はりの図心軸に沿って ζ 軸，ζ 軸に垂直な断面内に ξ,η 軸を断面の主軸方向に定める。断面肉厚の中央面に沿って s 軸，s 軸に垂直に n 軸を設ける。

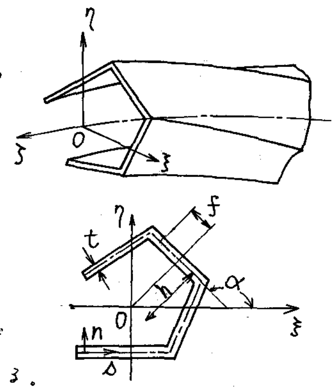

図 座標

初期応力・初期断面力

任意外力が作用して座屈直前のはり内に生じている応力を初期応力，それらの合応力を初期断面力と定義する。

○初期垂直応力：$\sigma_\zeta^{(0)}$

$$\sigma_\zeta^{(0)} = \frac{P_\zeta^{(0)}}{A} - \xi\left(I_{u\xi}M_\xi^{(0)} + I_{u\eta}M_\eta^{(0)} + I_{u\omega}M_\omega^{(0)}\right) - \eta\left(I_{v\xi}M_\xi^{(0)} + I_{v\eta}M_\eta^{(0)} + I_{v\omega}M_\omega^{(0)}\right) + \omega\left(I_{\theta\xi}M_\xi^{(0)} + I_{\theta\eta}M_\eta^{(0)} + I_{\theta\omega}M_\omega^{(0)}\right) \quad \cdots\cdots (1)$$

ここで，$P_\zeta^{(0)}, M_\xi^{(0)}, M_\eta^{(0)}, M_\omega^{(0)}$ は座屈直前のはり内の軸力，ξ,η 軸まわりのモーメント，曲げねじりモーメントである。Aは断面積，ω は図心に関する単位曲げねじれ関数である。また $I_{u\xi}, I_{u\eta}, \cdots\cdots, I_{\theta\omega}$ は断面定数で次式で表わされる。

$$I_{u\xi} = -I_{\xi\omega}I_{\eta\omega}/D,\ I_{u\eta} = (I_\eta I_\omega - I_{\eta\omega}^2)/D,\ I_{u\omega} = I_\eta I_{\xi\omega}/D,\ I_{v\xi} = (I_{\xi\omega}^2 - I_\xi I_\omega)/D$$

$$I_{v\eta} = I_{\xi\omega}I_{\eta\omega}/D,\ I_{v\omega} = -I_\xi I_{\eta\omega}/D,\ I_{\theta\xi} = -I_\xi I_{\eta\omega}/D,\ I_{\theta\eta} = I_\eta I_{\xi\omega}/D,\ I_{\theta\omega} = I_\xi I_\eta/D,\quad D = \begin{vmatrix} I_\xi & 0 & I_{\xi\omega} \\ 0 & I_\eta & I_{\eta\omega} \\ I_{\xi\omega} & I_{\eta\omega} & I_\omega \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots (2)$$

また，式(2)で，$I_\xi = \int_A \xi^2 dA$，$I_\eta = \int_A \eta^2 dA$，$I_{\xi\omega} = \int_A \xi\omega\, dA$，$I_{\eta\omega} = \int_A \eta\omega\, dA$，$I_\omega = \int_A \omega^2 dA$。

○ St. Venant のねじりによる初期せん断応力：${}_s\tau_{\xi\zeta}^{(0)}$，${}_s\tau_{\eta\zeta}^{(0)}$

St. Venant の応力関数を Φ_0 とすると，

$${}_s\tau_{\xi\zeta}^{(0)} = \frac{\partial\Phi_0}{\partial\eta},\quad {}_s\tau_{\eta\zeta}^{(0)} = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial\xi} \quad \cdots\cdots (3)$$

○曲げおよび曲げねじれ変形に伴なう初期せん断応力：${}_z\tau_{s\zeta}^{(0)}$

はりの微小要素の ζ 方向力の釣合より，

$${}_z\tau_{s\zeta}^{(0)} = -\frac{1}{t}\int_0^s \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\bar{\sigma}_\zeta^{(0)} t\right) ds + K_\zeta h\,\bar{\sigma}_\zeta^{(0)} \quad \cdots (4)$$

ここで，tは肉厚，$\bar{\sigma}_\zeta^{(0)}$ は曲げおよび曲げねじれ変形による垂直応力である。hは断面の幾何学的量で，図より $h = \xi\sin\alpha - \eta\cos\alpha$ である。

座屈変位・ひずみ成分

座屈によるはり内任意点の変位は，断面図心の ξ,η,ζ 方向変位 u,v,w と，ζ 軸まわりの断面回転角 θ により，次のように表わされる。 $U = u - \eta\theta$，$V = v + \xi\theta$，$W = w - \xi\Gamma_u - \eta\Gamma_v + \omega\Gamma_\theta \quad \cdots\cdots (5)$

ここで，$\Gamma_u = \frac{du}{d\zeta} - K_\zeta v + K_\eta w$，$\Gamma_v = \frac{dv}{d\zeta} + K_\zeta u - K_\xi\theta$，$\Gamma_\theta = \frac{d\theta}{d\zeta} + K_\xi\Gamma_u + K_\eta\Gamma_v \quad \cdots (6)$

であり，K_ξ, K_η は初期曲率 $1/R$ の ξ,η 方向成分，K_ζは初期ねじれ率である。

座屈変形により生ずるひずみは，次式で表わされる[2]。

$$\varepsilon_\zeta = e_\zeta + \bar{e}_\zeta = \Gamma_w - \xi\Omega_u - \eta\Omega_v + \omega\Omega_\theta + \frac{1}{2}\left[\Gamma_v + \xi\left(\frac{d\theta}{d\zeta} + K_\xi\Gamma_u\right)\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\Gamma_u - \eta\left(\frac{d\theta}{d\zeta} + K_\eta\Gamma_v\right)\right]^2$$

$$\varepsilon_{\xi\zeta} = e_{\xi\zeta} + \bar{e}_{\xi\zeta} = -\left(\eta - \frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right)\Gamma_\theta + \theta\left[\Gamma_v + \xi\left(\frac{d\theta}{d\zeta} + K_\xi\Gamma_u\right)\right],\ \varepsilon_{\eta\zeta} = e_{\eta\zeta} + \bar{e}_{\eta\zeta} = \left(\xi + \frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)\Gamma_\theta - \theta\left[\Gamma_u - \eta\left(\frac{d\theta}{d\zeta} + K_\eta\Gamma_v\right)\right] \quad \cdots\cdots (7)$$

$e_\zeta, e_{\xi\zeta}, e_{\eta\zeta}$ は変位の線形項，$\bar{e}_\zeta, \bar{e}_{\xi\zeta}, \bar{e}_{\eta\zeta}$ は非線形項を示す。$\Gamma_w, \Omega_u, \Omega_v, \Omega_\theta$ は次式の通り。

$$\Gamma_w = \frac{dw}{d\zeta} - K_\eta u + K_\xi v,\ \Omega_u = \frac{d\Gamma_u}{d\zeta} - K_\zeta\Gamma_v - K_\xi\theta,\ \Omega_v = \frac{d\Gamma_v}{d\zeta} + K_\zeta\Gamma_u - K_\eta\theta,\ \Omega_\theta = \frac{d\Gamma_\theta}{d\zeta} \quad \cdots (8)$$

仮想仕事の原理

初期応力 $\sigma_\zeta^{(0)}, \tau_{\xi\zeta}^{(0)}, \tau_{\eta\zeta}^{(0)}$ を有するはりの座屈変形に関する仮想仕事の原理は，文献(2)に従って次のように書ける。

$$\iiint_V [\sigma_\zeta \delta e_\zeta + \tau_{\xi\zeta}\delta e_{\xi\zeta} + \tau_{\eta\zeta}\delta e_{\eta\zeta}]\, dV + \iiint_V [\sigma_\zeta^{(0)}\delta \bar{e}_\zeta + \tau_{\xi\zeta}^{(0)}\delta \bar{e}_{\xi\zeta} + \tau_{\eta\zeta}^{(0)}\delta \bar{e}_{\eta\zeta}]\, dV = 0 \qquad \cdots (9)$$

式(7)を代入し，荷重が保存系をなす場合には，式(9)は $\delta\Pi = 0$ $\cdots (10)$

と表わされる。Π は全ポテンシャルエネルギで，変位および断面力による次のような式である。

$$\begin{aligned}
\Pi = {} & \frac{E}{2}\int_0^l [A\Gamma_w^2 + I_\xi \Omega_u^2 + I_\eta \Omega_v^2 + I_\omega \Omega_\theta^2 - 2I_{\xi\omega}\Omega_u\Omega_\theta - 2I_{\eta\omega}\Omega_v\Omega_\theta]\, d\zeta + \frac{G}{2}\int_0^l J\Gamma_\theta^2\, d\zeta \\
& + \frac{1}{2}\int_0^l [P_\zeta^{(0)}\{\Gamma_u^2 + \Gamma_v^2 + \gamma^2(\frac{d\theta}{d\zeta})^2\} + \frac{I_\eta}{A}(2\frac{d\theta}{d\zeta} + K_\eta\Gamma_v)K_\eta\Gamma_v + \frac{I_\xi}{A}(2\frac{d\theta}{d\zeta} + K_\xi\Gamma_u)K_\xi\Gamma_u - (B_\xi M_\xi^{(0)} + B_\eta M_\eta^{(0)} + B_\omega M_\omega^{(0)})(\frac{d\theta}{d\zeta})^2] \\
& - \frac{1}{2}\int_0^l (C_{\xi\xi}M_\xi^{(0)} + C_{\xi\eta}M_\eta^{(0)} + C_{\xi\omega}M_\omega^{(0)})K_\xi\Gamma_u(2\frac{d\theta}{d\zeta} + K_\xi\Gamma_u)\, d\zeta - \frac{1}{2}\int_0^l (C_{\eta\xi}M_\xi^{(0)} + C_{\eta\eta}M_\eta^{(0)} + C_{\eta\omega}M_\omega^{(0)})K_\eta\Gamma_v(2\frac{d\theta}{d\zeta} + K_\eta\Gamma_v)\, d\zeta \\
& - \int_0^l [\frac{dM_\xi^{(0)}}{d\zeta} - K_\zeta(C_{s\xi}M_\xi^{(0)} + C_{s\eta}M_\eta^{(0)} + C_{s\omega}M_\omega^{(0)})]\theta\Gamma_u\, d\zeta - \int_0^l [\frac{dM_\eta^{(0)}}{d\zeta} + K_\zeta(C_{c\xi}M_\xi^{(0)} + C_{c\eta}M_\eta^{(0)} + C_{c\omega}M_\omega^{(0)})]\theta\Gamma_v\, d\zeta \\
& - \int_0^l M_\eta^{(0)}\Gamma_v(\frac{d\theta}{d\zeta} + K_\xi\Gamma_u)\, d\zeta - \int_0^l M_\xi\Gamma_u(\frac{d\theta}{d\zeta} + K_\eta\Gamma_v)\, d\zeta + \frac{1}{2}\int_0^l (\bar{q}_\xi\xi_1 + \bar{q}_\eta\eta_1)\theta^2\, d\zeta + \frac{1}{2}\int_0^l K_\zeta\frac{dM_\omega^{(0)}}{d\zeta}\theta^2\, d\zeta \\
& - \frac{1}{2}K_\xi\int_0^l [C_{\xi\xi}\frac{dM_\xi^{(0)}}{d\zeta} + C_{\xi\eta}\frac{dM_\eta^{(0)}}{d\zeta} + C_{\xi\omega}\frac{dM_\omega^{(0)}}{d\zeta} + 2K_\zeta(C_{\xi\xi c}M_\xi^{(0)} + C_{\eta\xi c}M_\eta^{(0)} + C_{\omega\xi c}M_\omega^{(0)})]\theta\Gamma_u\, d\zeta \\
& - \frac{1}{2}K_\eta\int_0^l [C_{\eta\xi}\frac{dM_\xi^{(0)}}{d\zeta} + C_{\eta\eta}\frac{dM_\eta^{(0)}}{d\zeta} + C_{\eta\omega}\frac{dM_\omega^{(0)}}{d\zeta} + 2K_\zeta(C_{\xi\eta s}M_\xi^{(0)} + C_{\eta\eta s}M_\eta^{(0)} + C_{\omega\eta s}M_\omega^{(0)})]\theta\Gamma_v\, d\zeta \\
& - \frac{1}{2}\int_0^l (K_\eta M_\eta^{(0)} + K_\xi M_\xi^{(0)})\theta^2\, d\zeta - \frac{1}{2}\int_0^l K_\zeta^2(C_{h\xi}M_\xi^{(0)} + C_{h\eta}M_\eta^{(0)} + C_{h\omega}M_\omega^{(0)})\theta^2\, d\zeta + \left|\frac{1}{2}(\bar{Q}_\xi\xi_2 + \bar{Q}_\eta\eta_2)\theta^2\right|^l
\end{aligned} \qquad \cdots (11)$$

ここで，$\bar{q}_\xi$, $\bar{q}_\eta$ は点 (ξ_1, η_1) を通る曲線に沿って働く分布荷重であり，$\bar{Q}_\xi$, $\bar{Q}_\eta$ は $\zeta = l$ 断面内の点 (ξ_2, η_2) に働く集中荷重である。$\gamma^2 = (I_\xi + I_\eta)/A$ である。また式(11)で，

$$\begin{aligned}
&\{B_\xi, B_\eta, B_\omega\} = \mathbb{F}\{\beta_\xi, \beta_\eta, \beta_\omega\}, \quad \beta_p = \int_A p(\xi^2 + \eta^2)\, dA, \\
&\{C_{\xi\xi}, C_{\xi\eta}, C_{\xi\omega}\} = \mathbb{F}\{F_{\xi\xi\xi}, F_{\xi\xi\eta}, F_{\xi\xi\omega}\}, \quad F_{pqr} = \int_A pqr\, dA, \\
&\{C_{\eta\xi}, C_{\eta\eta}, C_{\eta\omega}\} = \mathbb{F}\{F_{\eta\eta\xi}, F_{\eta\eta\eta}, F_{\eta\eta\omega}\},
\end{aligned}
\qquad \mathbb{F} = \begin{pmatrix} I_{u\xi} & I_{v\xi} & -I_{\theta\xi} \\ I_{u\eta} & I_{v\eta} & -I_{\theta\eta} \\ I_{u\omega} & I_{v\omega} & -I_{\theta\omega} \end{pmatrix} \qquad \cdots (12)$$

である。さらに，式(11)を導く際に，初期せん断応力の積分項はそれぞれ次のように変形される[3]。

$$\int_A \tau_{\xi\zeta}^{(0)}\, dA = -\frac{dM_\eta^{(0)}}{d\zeta} - K_\zeta(C_{c\xi}M_\xi^{(0)} + C_{c\eta}M_\eta^{(0)} + C_{c\omega}M_\omega^{(0)}), \quad \{C_{c\xi}, C_{c\eta}, C_{c\omega}\} = \mathbb{F}\{F_{\xi hc}, F_{\eta hc}, F_{\omega hc}\}, \quad c = \cos\alpha$$

$$\int_A \tau_{\eta\zeta}^{(0)}\, dA = \frac{dM_\xi^{(0)}}{d\zeta} - K_\zeta(C_{s\xi}M_\xi^{(0)} + C_{s\eta}M_\eta^{(0)} + C_{s\omega}M_\omega^{(0)}), \quad \{C_{s\xi}, C_{s\eta}, C_{s\omega}\} = \mathbb{F}\{F_{\xi hs}, F_{\eta hs}, F_{\omega hs}\}, \quad s = \sin\alpha$$

$$\int_A \tau_{\xi\zeta}^{(0)}\xi\, dA = -\frac{1}{2}(C_{\xi\xi}\frac{dM_\xi^{(0)}}{d\zeta} + C_{\xi\eta}\frac{dM_\eta^{(0)}}{d\zeta} + C_{\xi\omega}\frac{dM_\omega^{(0)}}{d\zeta}) - K_\zeta(C_{\xi\xi c}M_\xi^{(0)} + C_{\eta\xi c}M_\eta^{(0)} + C_{\omega\xi c}M_\omega^{(0)})$$

$$\{C_{\xi\xi c}, C_{\eta\xi c}, C_{\omega\xi c}\} = \mathbb{F}\{H_{\xi\xi c}, H_{\eta\xi c}, H_{\omega\xi c}\}, \quad H_{pqr} = \int_A hpqr\, dA$$

$$\int_A \tau_{\eta\zeta}^{(0)}\eta\, dA = -\frac{1}{2}(C_{\eta\xi}\frac{dM_\xi^{(0)}}{d\zeta} + C_{\eta\eta}\frac{dM_\eta^{(0)}}{d\zeta} + C_{\eta\omega}\frac{dM_\omega^{(0)}}{d\zeta}) - K_\zeta(C_{\xi\eta s}M_\xi^{(0)} + C_{\eta\eta s}M_\eta^{(0)} + C_{\omega\eta s}M_\omega^{(0)})$$

$$\{C_{\xi\eta s}, C_{\eta\eta s}, C_{\omega\eta s}\} = \mathbb{F}\{H_{\xi\eta s}, H_{\eta\eta s}, H_{\omega\eta s}\}$$

$$\int_A \frac{\partial}{\partial\zeta}(\tau_{\xi\zeta}^{(0)}\xi + \tau_{\eta\zeta}^{(0)}\eta)\, dA = -(\bar{q}_\xi\xi_1 + \bar{q}_\eta\eta_1) + K_\eta M_\eta^{(0)} + K_\xi M_\xi^{(0)} - K_\zeta\frac{dM_\omega^{(0)}}{d\zeta} + K_\zeta^2(C_{h\xi}M_\xi^{(0)} + C_{h\eta}M_\eta^{(0)} + C_{h\omega}M_\omega^{(0)})$$

$$\{C_{h\xi}, C_{h\eta}, C_{h\omega}\} = \mathbb{F}\{F_{\xi hh}, F_{\eta hh}, F_{\omega hh}\} \qquad \cdots (13)$$

$$\int_A (\tau_{\xi\zeta}^{(0)}\xi + \tau_{\eta\zeta}\eta)_{\zeta=l}\, dA = \bar{Q}_\xi\xi_2 + \bar{Q}_\eta\eta_2$$

座屈に関する方程式

式(11)を用い，全ポテンシャルエネルギの第1変分を部分積分すると，座屈に関する微分方程式が変分原理に従って，次のように求まる。

$$\begin{aligned}
& -\frac{dP_\xi}{d\zeta} + K_\zeta P_\eta - K_\eta P_\zeta - \frac{d}{d\zeta}[P_\zeta^{(0)}\Gamma_u - \frac{d}{d\zeta}(M_\xi^{(0)}\theta) - (K_\xi M_\eta^{(0)} + K_\eta M_\xi^{(0)})\Gamma_v + K_\zeta M_\eta^{(0)}\theta - \frac{I_\xi}{A}K_\xi P_\zeta^{(0)}(\frac{d\theta}{d\zeta} + K_\xi\Gamma_u)] \\
& + \frac{d}{d\zeta}[K_\xi(C_{\xi\xi}M_\xi^{(0)} + C_{\xi\eta}M_\eta^{(0)} + C_{\xi\omega}M_\omega^{(0)})(\frac{d\theta}{d\zeta} + K_\xi\Gamma_u) + \frac{1}{2}K_\zeta^{(0)}(C_{\xi\xi}\frac{dM_\xi^{(0)}}{d\zeta} + C_{\xi\eta}\frac{dM_\eta^{(0)}}{d\zeta} + C_{\xi\omega}\frac{dM_\omega^{(0)}}{d\zeta})\theta \\
& \qquad - K_\zeta\{(C_{s\xi} - K_\xi C_{\xi\xi c})M_\xi^{(0)} + (C_{s\eta} - K_\xi C_{\eta\xi c})M_\eta^{(0)} + (C_{s\omega} - K_\xi C_{\omega\xi c})M_\omega^{(0)}\}\theta]
\end{aligned}$$

$$+K_\zeta\left[P_\zeta^{(0)}\Gamma_v-(K_\xi M_\eta^{(0)}+K_\eta M_\xi^{(0)})\Gamma_u+\frac{I_\eta}{A}P_\zeta^{(0)}K_\eta\left(\frac{d\theta}{d\zeta}+K_\eta\Gamma_v\right)\right]-K_\eta K_\zeta\left[\frac{1}{2}\left(C_{\eta\xi}\frac{dM_\xi^{(0)}}{d\zeta}+C_{\eta\eta}\frac{dM_\eta^{(0)}}{d\zeta}+C_{\eta\omega}\frac{dM_\omega^{(0)}}{d\zeta}\right)\theta\right.$$

$$\left.+(C_{\eta\xi}M_\xi^{(0)}+C_{\eta\eta}M_\eta^{(0)}+C_{\eta\omega}M_\omega^{(0)})\left(\frac{d\theta}{d\zeta}+K_\eta\Gamma_v\right)\right]-K_\zeta^2\left[(C_{c\xi}+K_\eta C_{\xi\eta s})M_\xi^{(0)}+(C_{c\eta}+K_\eta C_{\eta\eta s})M_\eta^{(0)}\right.$$

$$\left.+(C_{c\omega}+K_\eta C_{\omega\eta s})M_\omega^{(0)}\right]\theta=0$$

$$-\frac{dP_\eta}{d\zeta}-K_\zeta P_\xi+K_\xi P_\zeta-\frac{d}{d\zeta}\left[P_\zeta^{(0)}\Gamma_v-\frac{d}{d\zeta}(M_\eta^{(0)}\theta)-(K_\xi M_\eta^{(0)}+K_\eta M_\xi^{(0)})\Gamma_u-K_\zeta M_\xi^{(0)}\theta+\frac{I_\eta}{A}P_\zeta^{(0)}K_\eta\left(\frac{d\theta}{d\zeta}+K_\eta\Gamma_v\right)\right]$$

$$+\frac{d}{d\zeta}\left[K_\eta(C_{\eta\xi}M_\xi^{(0)}+C_{\eta\eta}M_\eta^{(0)}+C_{\eta\omega}M_\omega^{(0)})\left(\frac{d\theta}{d\zeta}+K_\eta\Gamma_v\right)+\frac{1}{2}K_\eta\left(C_{\eta\xi}\frac{dM_\xi^{(0)}}{d\zeta}+C_{\eta\eta}\frac{dM_\eta^{(0)}}{d\zeta}+C_{\eta\omega}\frac{dM_\omega^{(0)}}{d\zeta}\right)\theta\right.$$

$$\left.+K_\zeta\left\{(C_{c\xi}+K_\eta C_{\xi\eta s})M_\xi^{(0)}+(C_{c\eta}+K_\eta C_{\eta\eta s})M_\eta^{(0)}+(C_{c\omega}+K_\eta C_{\omega\eta s})M_\omega^{(0)}\right\}\theta\right]$$

$$-K_\zeta\left[P_\zeta^{(0)}\Gamma_u-(K_\xi M_\eta^{(0)}+K_\eta M_\xi^{(0)})\Gamma_v+\frac{I_\xi}{A}P_\zeta^{(0)}K_\xi\left(\frac{d\theta}{d\zeta}+K_\xi\Gamma_u\right)\right]+K_\xi K_\zeta\left[\frac{1}{2}\left(C_{\xi\xi}\frac{dM_\xi^{(0)}}{d\zeta}+C_{\xi\eta}\frac{dM_\eta^{(0)}}{d\zeta}+C_{\xi\omega}\frac{dM_\omega^{(0)}}{d\zeta}\right)\theta\right.$$

$$\left.+(C_{\xi\xi}M_\xi^{(0)}+C_{\xi\eta}M_\eta^{(0)}+C_{\xi\omega}M_\omega^{(0)})\left(\frac{d\theta}{d\zeta}+K_\xi\Gamma_u\right)\right]-K_\zeta^2\left[(C_{s\xi}-K_\xi C_{\xi\xi c})M_\xi^{(0)}+(C_{s\eta}-K_\xi C_{\eta\xi c})M_\eta^{(0)}\right.$$

$$\left.+(C_{s\omega}-K_\xi C_{\omega\xi c})M_\omega^{(0)}\right]\theta=0$$

$$-\frac{dP_\zeta}{d\zeta}+K_\eta P_\xi-K_\xi P_\eta+P_\zeta^{(0)}(K_\eta\Gamma_u-K_\xi\Gamma_v)-K_\eta\frac{d}{d\zeta}(M_\xi^{(0)}\theta)+K_\xi\frac{d}{d\zeta}(M_\eta^{(0)}\theta)+(K_\eta M_\xi^{(0)}+K_\xi M_\eta^{(0)})(K_\xi\Gamma_u-K_\eta\Gamma_v)$$

$$-\frac{1}{2}K_\xi K_\eta\left[(C_{\xi\xi}-C_{\eta\xi})\frac{dM_\xi^{(0)}}{d\zeta}+(C_{\xi\eta}-C_{\eta\eta})\frac{dM_\eta^{(0)}}{d\zeta}+(C_{\xi\omega}-C_{\eta\omega})\frac{dM_\omega^{(0)}}{d\zeta}\right]\theta+K_\xi K_\eta P_\zeta^{(0)}\left(\frac{I_\xi}{A}K_\xi\Gamma_u-\frac{I_\eta}{A}K_\eta\Gamma_v\right)$$

$$-K_\xi K_\eta(C_{\xi\xi}M_\xi^{(0)}+C_{\xi\eta}M_\eta^{(0)}+C_{\xi\omega}M_\omega^{(0)})\left(\frac{d\theta}{d\zeta}+K_\xi\Gamma_u\right)+K_\xi K_\eta(C_{\eta\xi}M_\xi^{(0)}+C_{\eta\eta}M_\eta^{(0)}+C_{\eta\omega}M_\omega^{(0)})\left(\frac{d\theta}{d\zeta}+K_\eta\Gamma_v\right)$$

$$+K_\xi K_\zeta\left[(C_{c\xi}+K_\eta C_{\xi\eta s})M_\xi^{(0)}+(C_{c\eta}+K_\eta C_{\eta\eta s})M_\eta^{(0)}+(C_{c\omega}+K_\eta C_{\omega\eta s})M_\omega^{(0)}\right]\theta$$

$$+K_\eta K_\zeta\left[(C_{s\xi}-K_\xi C_{\xi\xi c})M_\xi^{(0)}+(C_{s\eta}-K_\xi C_{\eta\xi c})M_\eta^{(0)}+(C_{s\omega}-K_\xi C_{\omega\xi c})M_\omega^{(0)}\right]\theta=0$$

$$-\frac{dM_\zeta}{d\zeta}-K_\xi M_\eta+K_\eta M_\xi-\frac{d}{d\zeta}\left[\left\{r^2P_\zeta^{(0)}-(B_\xi M_\xi^{(0)}+B_\eta M_\eta^{(0)}+B_\omega M_\omega^{(0)})\right\}\frac{d\theta}{d\zeta}+\left(\frac{I_\xi}{A}K_\xi\Gamma_u+\frac{I_\eta}{A}K_\eta\Gamma_v\right)P_\zeta^{(0)}\right]$$

$$+M_\eta^{(0)}\frac{d\Gamma_v}{d\zeta}+M_\xi^{(0)}\frac{d\Gamma_u}{d\zeta}+K_\xi\frac{d}{d\zeta}\left[(C_{\xi\xi}M_\xi^{(0)}+C_{\xi\eta}M_\eta^{(0)}+C_{\xi\omega}M_\omega^{(0)})\Gamma_u\right]+K_\eta\frac{d}{d\zeta}\left[(C_{\eta\xi}M_\xi^{(0)}+C_{\eta\eta}M_\eta^{(0)}+C_{\eta\omega}M_\omega^{(0)})\Gamma_v\right]$$

$$-K_\zeta\left[(C_{c\xi}+K_\eta C_{\xi\eta s})M_\xi^{(0)}+(C_{c\eta}+K_\eta C_{\eta\eta s})M_\eta^{(0)}+(C_{c\omega}+K_\eta C_{\omega\eta s})M_\omega^{(0)}\right]\Gamma_v$$

$$+K_\zeta\left[(C_{s\xi}-K_\xi C_{\xi\xi c})M_\xi^{(0)}+(C_{s\eta}-K_\xi C_{\eta\xi c})M_\eta^{(0)}+(C_{s\omega}-K_\xi C_{\omega\xi c})M_\omega^{(0)}\right]\Gamma_u$$

$$-\left(K_\xi M_\xi^{(0)}+K_\eta M_\eta^{(0)}-K_\zeta\frac{dM_\omega^{(0)}}{d\zeta}\right)\theta+(\bar{q}_\xi\xi_1+\bar{q}_\eta\eta_1)\theta-K_\zeta^2(C_{h\xi}M_\xi^{(0)}+C_{h\eta}M_\eta^{(0)}+C_{h\omega}M_\omega^{(0)})\theta$$

$$-\frac{1}{2}K_\xi\left(C_{\xi\xi}\frac{dM_\xi^{(0)}}{d\zeta}+C_{\xi\eta}\frac{dM_\eta^{(0)}}{d\zeta}+C_{\xi\omega}\frac{dM_\omega^{(0)}}{d\zeta}\right)\Gamma_u-\frac{1}{2}K_\eta\left(C_{\xi\eta}\frac{dM_\xi^{(0)}}{d\zeta}+C_{\eta\eta}\frac{dM_\eta^{(0)}}{d\zeta}+C_{\eta\omega}\frac{dM_\omega^{(0)}}{d\zeta}\right)\Gamma_v=0 \quad\cdots (14)$$

ここで，$M_\xi, M_\eta, M_\omega, M_\zeta$ は座屈変形によって生じた曲げモーメント，曲げねじれモーメント，合ねじれモーメントで，それぞれ次のように変位で表わされる。

$$M_\xi=\int_A\sigma_\zeta\eta\,dA=-EI_\eta\Omega_v+EI_{\eta\omega}\Omega_\theta,\quad M_\eta=-\int_A\sigma_\zeta\xi\,dA=EI_\xi\Omega_u-EI_{\xi\omega}\Omega_\theta$$

$$M_\omega=\int_A\sigma_\zeta\omega\,dA=-EI_{\xi\omega}\Omega_u-EI_{\eta\omega}\Omega_v+EI_\omega\Omega_\theta,\quad M_\zeta=-\frac{dM_\omega}{d\zeta}+M_s=-\frac{dM_\omega}{d\zeta}+GJ\Gamma_\theta \quad\cdots (15)$$

また，P_ξ，P_η，P_ζ は断面力の ξ, η, ζ 方向成分で，

$$P_\xi=-\frac{dM_\eta}{d\zeta}-K_\zeta M_\xi+K_\xi M_\zeta=-(EI_\xi-EI_{\xi\omega}K_\xi)\frac{d\Omega_u}{d\zeta}+EI_{\eta\omega}K_\xi\frac{d\Omega_v}{d\zeta}+(EI_{\xi\omega}-EI_\omega K_\xi)\frac{d\Omega_\theta}{d\zeta}$$

$$+K_\zeta(EI_\eta\Omega_v-EI_{\eta\omega}\Omega_\theta)+GJK_\xi\Gamma_\theta$$

$$P_\eta=\frac{dM_\xi}{d\zeta}-K_\zeta M_\eta+K_\eta M_\zeta=EI_{\xi\omega}K_\eta\frac{d\Omega_u}{d\zeta}-(EI_\eta-EI_{\eta\omega}K_\eta)\frac{d\Omega_v}{d\zeta}+(EI_{\eta\omega}-EI_\omega K_\eta)\frac{d\Omega_\theta}{d\zeta}$$

$$-K_\zeta(EI_\xi\Omega_u-EI_{\xi\omega}\Omega_\theta)+GJK_\eta\Gamma_\theta$$

$$P_\zeta=EA\Gamma_w \quad\cdots (16)$$

ここに，J は St. Venant のねじり剛性係数であり，$J=\int_A\left[\left(\xi+\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)^2+\left(\eta-\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right)^2\right]dA$ と表わされる。

<u>文献</u>

(1) Washizu, Jour. Math. Physics Vol. No.2, 1964.

(2) Washizu, Pergamon Press, 1968　(3) 華地，長大工学部報告，第3号，1972