

西日本工業大学 正会員 ○ 花倉芳康
九州工業大学 正会員 山本 宏

1. まえ書き……筆者らは、先に円弧格子げたの伝達マトリックス法による解析を行なったが、ここでは、断面のそり変形を拘束することにより生ずる曲げねじりモーメント、二次ねじりモーメントの影響をも考慮した円弧格子げたの伝達式を導出したものである。ここで取扱う円弧格子げたは、各主げたが同心円弧でなく、かつ主げたと横げたが斜交している格子げたで、荷重は材軸を含む面に直交な方向から作用するものとし、また、せん断中心軸と重心軸は、水平曲面内方向に一致すると仮定する。ここに示す伝達式は、直線は円弧の特別な場合であると考へれば、任意形状の直線格子げたの伝達式をも含む。

2. 基準座標系、部材座標系……基準座標軸(XYZ)は、任意点Oを中心として各節点を通る同心円弧の接線と法線なうびに材軸を含む面に直交な方向とする。部材座標軸(xyz)は、主げたの場合は、円弧ばりの任意点における接線と法線なうびに材軸を含む面に直交な方向とし、横げたの場合は、材軸とその直交な方向なうびに材軸を含む面に直交な方向とし、図-1に示す方向と正とする。

3. 節点力、節点変位……主げたをその中心より見て、左端と右端をきめ、節点力は、図-2(a)に示すように考え、節点変位は軸の正方向に変位する場合なうびに軸の正方向に向いて時計まわりに回転する場合を正とする。

4. 基本式……円弧ばりに等分布荷重が作用する場合について次式が得られる。

$$\frac{d^2 M}{d\varphi^2} + \frac{dT}{d\varphi} - gR = 0, \quad \frac{dT}{d\varphi} - M = 0, \quad \frac{dQ}{Rd\varphi} = g \quad \dots\dots (1)$$

$$M = -\frac{EI}{R^2} \left(\frac{d^2 w}{d\varphi^2} - \bar{\varphi} \right), \quad M_w = -\frac{EC_w}{R^3} \left(\frac{d^2 \bar{\varphi}}{d\varphi^2} + \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \right) \quad \dots\dots (2)$$

$$T = -\frac{GJ}{R^2} \left(\frac{d\bar{\varphi}}{d\varphi} + \frac{dw}{d\varphi} \right) + \frac{EC_w}{R^4} \left(\frac{d^2 \bar{\varphi}}{d\varphi^2} + \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \right), \quad Q = \frac{1}{R} \left(\frac{dM}{d\varphi} + T \right) \quad \dots\dots (3)$$

$$\bar{\varphi} = R\psi; \text{ねじり角}, \quad \bar{\theta} = R\theta = -\frac{dw}{d\varphi}; \text{たわみ角}, \quad \bar{p} = R^2 p = \frac{d\bar{\varphi}}{d\varphi} + \frac{dw}{d\varphi}; \text{ねじり率} \quad \dots\dots (4)$$

(1), (2) 式よりたわみ(w)に関する微分方程式は

$$\frac{C_w}{R^2 I} \frac{d^4 w}{d\varphi^4} + \left(\frac{2C_w}{R^2 I} - \lambda \right) \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \left(\frac{C_w}{R^2 I} - 2\lambda \right) \frac{d^2 w}{d\varphi^2} - \lambda \frac{d^2 w}{d\varphi^2} = \frac{gR^4}{EI} \quad \dots\dots (5)$$

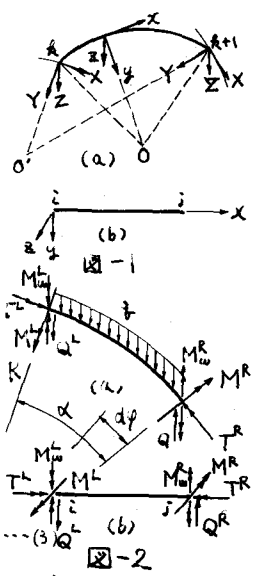
となる。ただし $\lambda = \frac{GJ}{EI}$ C_w : 曲げねじり定数 M_w : 曲げねじりモーメント

5. 格間伝達式……(5)式の一般解は、 $\mu = R^2 GJ/EC_w$ とすると

$$w = C_1 + C_2 \varphi + C_3 \cos \varphi + C_4 \sin \varphi + C_5 \varphi \cos \varphi + C_6 \varphi \sin \varphi + C_7 \cosh \mu \varphi + C_8 \sinh \mu \varphi - \frac{1}{\lambda} \frac{gR^4}{EI} \frac{\varphi^2}{2} \quad \dots\dots (6)$$

となる。(6)式の $C_1 \sim C_8$ は境界条件より求められる。したがって(2)(3)(4)式より部材座標系における円弧ばり要素の両端の状態量ベクトルを結び格間伝達式が(7)式のように求められる。ただし(7)式における記号は次のようなものである。

$$\begin{aligned} A &= (1+\lambda)\alpha \sin \alpha - 2(1-\cos \alpha) & B &= 2 \sin \alpha - (1+\lambda)(\sin \alpha + \alpha \cos \alpha) & C &= -(1+\lambda)\alpha \sin \alpha \\ D &= (1+\lambda)\alpha \cos \alpha - \sin \alpha & E &= -(1+\lambda)\sin \alpha - (1+\lambda)\alpha \cos \alpha & F &= (1+\lambda)(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - 2(\alpha - \sin \alpha) \\ a &= -\alpha \sin \alpha - \frac{2}{\mu^2 + 1} \cos \alpha + \frac{2}{\mu^2 + 1} \cosh \mu \alpha & c &= -\frac{2\mu^2}{\mu^2 + 1} \cos \alpha + \alpha \sin \alpha + \frac{2\mu^2}{\mu^2 + 1} \cosh \mu \alpha \\ d &= -\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} \sin \alpha - \alpha \cos \alpha + \frac{2}{\mu^2 + 1} \sinh \mu \alpha & e &= \frac{2\mu^2 + 1}{\mu^2 + 1} \sin \alpha + \alpha \cos \alpha + \frac{2\mu^2}{\mu^2 + 1} \sinh \mu \alpha \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 f &= -\frac{\mu^2+3}{\mu^2+1} \sin \mu x + \mu \cos \mu x + \frac{2}{\lambda(\mu^2+1)} \sinh \mu x & h &= \sin \mu x - \frac{1}{\mu} \sinh \mu x \\
 g &= -\cos \mu x + \cosh \mu x & i &= -\frac{\mu^2+1}{\mu^2} \cos \mu x + \frac{1}{\mu^2} \cosh \mu x & k &= \sin \mu x + \mu \sinh \mu x
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \omega \\ \bar{\theta} \\ \bar{\psi} \\ \bar{p} \\ M_w \\ M \\ T \\ Q \\ 1 \end{bmatrix}^R = \begin{bmatrix} 1 & -\sin \mu & 1 - \cosh \mu & -\frac{1}{1+\mu^2} & \frac{R^2}{EC_w} \frac{1}{1+\mu^2} & \frac{R^2}{2GJ} (A + \frac{g}{1+\mu^2}) & \frac{R^2}{2GJ} (D + \frac{h}{1+\mu^2}) & \frac{R^2}{2GJ} (F + \frac{k}{1+\mu^2}) & \omega_0^R \\ 0 & \cos \mu & -\sin \mu & \frac{1}{1+\mu^2} & \frac{R^2}{EC_w} \frac{1}{1+\mu^2} & \frac{R^2}{2GJ} (B - \frac{d}{1+\mu^2}) & \frac{R^2}{2GJ} (C + \frac{e}{1+\mu^2}) & \frac{R^2}{2GJ} (A + \frac{f}{1+\mu^2}) & \bar{\theta}_0^R \\ 0 & \sin \mu & \cosh \mu & \frac{1}{1+\mu^2} & \frac{R^2}{EC_w} \frac{1}{1+\mu^2} & \frac{R^2}{2GJ} (C + \frac{e}{1+\mu^2}) & \frac{R^2}{2GJ} (E + \frac{g}{1+\mu^2}) & \frac{R^2}{2GJ} (D + \frac{h}{1+\mu^2}) & \bar{\psi}_0^R \\ 0 & 0 & 0 & \cosh \mu & \frac{R^2}{EC_w} \frac{\sinh \mu}{\mu} & \frac{R^2}{2GJ} \frac{-1}{1+\mu^2} & \frac{R^2}{2GJ} \frac{g}{1+\mu^2} & \frac{R^2}{2GJ} \frac{1}{1+\mu^2} & \bar{p}_0^R \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EC_w}{R^2} \mu \sinh \mu & \cosh \mu & \frac{g}{1+\mu^2} R & \frac{h}{1+\mu^2} R & \frac{-1}{1+\mu^2} R^2 & M_w^R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \mu & -\sin \mu & R \sin \mu & M^R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \mu & \cos \mu & R(1 - \cos \mu) & T^R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Q^R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \bar{\theta} \\ \bar{\psi} \\ \bar{p} \\ M_w \\ M \\ T \\ Q \\ 1 \end{bmatrix}^L \quad \text{--- (7)}$$

ただし、 $\omega_0^R, \bar{\theta}_0^R, \bar{\psi}_0^R, \bar{p}_0^R, M_w^R, M^R, T^R, Q^R$ は荷重項である。また (7) 式を短縮して、

$$V^R = F V^L \quad \text{--- (8)}$$

次に部材座標系から基準座標系へ変換すると

$$\bar{V}^R = R^{-1} F R V^L = \bar{F} \bar{V}^L \quad \text{--- (9)}$$

(8) 式における $\bar{V}^R, \bar{V}^L, \bar{F}$ は基準座標系における状態量ベクトルと格点伝達マトリックスであり、 R は座標変換マトリックスで、曲げねじりモーメントに対応する節点変位の変位成分は変換しないものとするとき次のようになる。

$$R = \begin{bmatrix} R' & 0 \\ 0 & R' \end{bmatrix} \quad R' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \theta: \text{X軸とX'軸とのなす角で} \\ \text{時計まわりを正とする。} \end{array}$$

6. 格点伝達式 --- 図-2 (b) に示す横げた断面力と変位との関係式は、(7) 式を変形して極限值を求めると次のようになる。ただし、 $\eta = 2(1 - \cosh \mu_0) + \mu_0 \sinh \mu_0$, $\mu_0 = l^2 GJ / EC_w$ とする。

$$\begin{bmatrix} M_w \\ M^L \\ T^L \\ Q^L \\ M_w^R \\ M^R \\ T^R \\ Q^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{EC_w \mu_0}{\eta} (\cosh \mu_0 - 1) & \frac{EC_w \mu_0}{\eta} (\mu_0 \cosh \mu_0 - \sinh \mu_0) & 0 & 0 & \frac{EC_w \mu_0^2}{\eta} (\cosh \mu_0 - 1) & \frac{EC_w \mu_0}{\eta} (\mu_0 - \sinh \mu_0) \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ}{\eta} \mu_0 \sinh \mu_0 & \frac{GJ}{\eta} (1 - \cosh \mu_0) & 0 & 0 & -\frac{GJ}{\eta} \mu_0 \sinh \mu_0 & \frac{GJ}{\eta} (1 - \cosh \mu_0) \\ \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EC_w \mu_0^2}{\eta} (\cosh \mu_0 - 1) & \frac{EC_w \mu_0}{\eta} (\sinh \mu_0 - \mu_0) & 0 & 0 & \frac{EC_w \mu_0^2}{\eta} (\cosh \mu_0 - 1) & \frac{EC_w \mu_0}{\eta} (\sinh \mu_0 - \mu_0) \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{-2EI}{l} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{-4EI}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ}{\eta} \mu_0 \sinh \mu_0 & \frac{GJ}{\eta} (1 - \cosh \mu_0) & 0 & 0 & -\frac{GJ}{\eta} \mu_0 \sinh \mu_0 & \frac{GJ}{\eta} (1 - \cosh \mu_0) \\ \frac{12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^L \\ \theta^L \\ \psi^L \\ p^L \\ \omega^R \\ \theta^R \\ \psi^R \\ p^R \end{bmatrix} \quad \text{--- (10)}$$

(10) 式を用いて基準座標系における力の釣合条件、適合条件を考えれば、格点伝達式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \vdots \\ \bar{V}_m \end{bmatrix}^L = \begin{bmatrix} P_1 B_1 & 0 & \cdots & 0 & Q_{01} \\ B'_1 P_2 & B_2 & \cdots & 0 & Q_{02} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B'_m P_m & Q_{0m} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \vdots \\ \bar{V}_m \\ 1 \end{bmatrix}^R \quad \text{--- (11)}$$

$$P_i = \begin{bmatrix} I_3 \\ -K_{21}^{-1} I_3 \\ -K_{22}^{-1} I_3 \end{bmatrix} \quad B_j = \begin{bmatrix} O_3 \\ -K_{12}^{-1} O_3 \\ O_3 \end{bmatrix} \quad B'_j = \begin{bmatrix} O_3 & O_3 \\ K_{21}^{-1} & O_3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} K_{ij}, (10) \text{ 式の剛性マトリックスの基} \\ \text{準座標系へ変換したものである。} \end{array}$$

(11) 式は、式 (8) によって伝達される。したがってこれらの伝達式を用いて円弧格子げた解析を行なうことができる。先に述べたように (7) 式の極限值 ($\mu \rightarrow 0$) を求めることによって直線格子げた伝達式が得られる。

7. 参考文献 --- 1) 花倉、山本；土木学会西部支部研究発表会論文集 昭 48. 2. P. 211~212

2) 成岡、遠田；伝達マトリックス法 (コンピュータによる構造工学講座 1-2-B), 培風館

3) 渡辺、徳農、藤井；曲げねじり剛性をもった曲線桁橋の剛性マトリックス法による解析, 土木学会論文集 218号, P. 1, 1973