II－13　　変断面柱の座屈解法について

長崎大学　正員　崎山 毅

1、まえがき　断面の高さや幅が部材の長さ方向に変化するいわゆる変断面ばりの座屈問題に関しては、古くから多くの研究が行われてきており、いくつかの特別な断面2次モーメントの変化を有する変断面ばりに関しては解析的な解がえられている。断面積が任意に変化するはりの座屈荷重は置換階段状変断面ばりに座屈撓角法あるいはマトリックス法などの解法を適用することにより算定することができるが、階段数の増加に伴って、数値計算が不安定になる場合が生じる。

本研究は任意の境界条件を有し、任意に変化する断面をもつ変断面ばりの一座屈解法を提示するものである。変断面ばりは階段状変断面ばりに置換され、その座屈方程式の解析解が求められる。座屈条件式は、一様断面ばりと同様に、両端部の境界条件から得られる。

2、座屈方程式

直線ばりの座屈方程式は、たわみ、たわみ角、曲げモーメント、せん断力および曲げ剛性をそれぞれ $\bar{y}$, θ, $\bar{M}$, $\bar{Q}$ および EI とすれば、周知の次式で与えられる。

$$\frac{d\bar{Q}}{dx} - P\frac{d\theta}{dx} = 0 \quad (1\cdot a), \qquad \bar{Q} = \frac{d\bar{M}}{dx} \quad (1\cdot b)$$

$$\bar{M} = -EI\frac{d\theta}{dx} \quad (1\cdot c), \qquad \theta = \frac{d\bar{y}}{dx} \quad (1\cdot d)$$

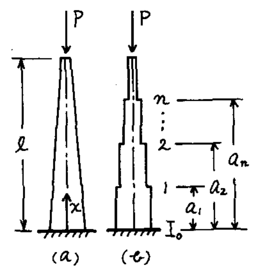

図-1

図-1(a)に示す置換階段状変断面ばりの断面2次モーメント $I(x)$ は単位階段関数 $u(x-a_i)$ を用いて次のとおり表わされる。

$$I(x) = I_0 \sum_{i=0}^{n} \nu_i u(x-a_i) \qquad (2)$$

ただし　I_0：x 座標系の原点に対応する断面の2次モーメント

ν_i：第 i 番目の階段部における断面2次モーメントの変化率　，$\nu_0 = 1$

n：断面急変部（階段部）の数

$u(x-a_i) = 0 \quad (x < a_i) \;,\; 1 \quad (x \geqq a_i)$

ここで、$\eta = x/\ell$, $y = \bar{y}/\ell$, $M = -\ell\bar{M}/EI_0$, $Q = -\ell^2\bar{Q}/EI_0$, $\xi_i = a_i/\ell$ なる無次元量を用うれば、式(1・a)～(1・d)および式(2)より、n 個の断面急変部をもつ階段状変断面ばりの座屈方程式として、次の連立微分方程式がえられる。部材長を ℓ, $\lambda^2 = P\ell^2/EI_0$ とした

$$\frac{dQ}{d\eta} + \lambda^2\frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad (3\cdot a) \quad , \quad Q = \frac{dM}{d\eta} \quad (3\cdot b)$$

$$M = \sum_{i=0}^{n} \nu_i u(\eta-\xi_i)\frac{d\theta}{d\eta} \quad (3\cdot c) \quad , \quad \theta = \frac{dy}{d\eta} \quad (3\cdot d)$$

3、座屈方程式の解

連立微分方程式(3・a)～(3・d)の解は次式である。

$$\begin{bmatrix} y(\eta) \\ \theta(\eta) \\ M(\eta) \\ Q(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \eta & \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{2} a_{1kj} f_{1kj}(\eta)u(\eta-\xi_k) & \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{2} a_{2kj} f_{1kj}(\eta)u(\eta-\xi_k) \\ 0 & 1 & \sum\sum a_{1kj} f_{2kj}(\eta)u(\eta-\xi_k) & \sum\sum a_{2kj} f_{2kj}(\eta)u(\eta-\xi_k) \\ 0 & 0 & \sum\sum a_{1kj} f_{3kj}(\eta)u(\eta-\xi_k) & \sum\sum a_{2kj} f_{3kj}(\eta)u(\eta-\xi_k) \\ 0 & 0 & \sum\sum a_{1kj} f_{4kj}(\eta)u(\eta-\xi_k) & \sum\sum a_{2kj} f_{4kj}(\eta)u(\eta-\xi_k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y(0) \\ \theta(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} (4\cdot a) \\ (4\cdot b) \\ (4\cdot c) \\ (4\cdot d) \end{matrix}$$

ただし　$a_{pkm}=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{2} f_{mij}(\xi_k)\cdot a_{pij}$　$(m,p=1,2\ ;\ k=1,2,\cdots n)$，$a_{pom}=\delta_{pm}$（クロネッカーデルタ）

$f_{soj}(\eta)=f_{102}^{(m)}(\eta)$　$(s=1,2,3,4)$，$f_{skj}(\eta)=f_{1k2}^{(m)}(\eta)$　$(s=1,2)$，$-\lambda^2 f_{1k2}^{(t)}(\eta)$　$(s=3,4)$　$\left(\begin{matrix} m=s-j+1 \\ t=s-j-1 \end{matrix}\right)$

$f_{102}(\eta)=\frac{1}{\lambda^2}\left(\eta-\frac{1}{\lambda}\sin\lambda\eta\right)$，$f_{1k2}(\eta)=\frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k(\eta-\xi_k)-\frac{1}{\lambda_{k+1}}\sin\lambda_{k+1}(\eta-\xi_k)\right]$

$\lambda_k^2=\lambda^2/\mu_k$，　$\mu_k=\sum_{i=0}^{k-1}\nu_i$

4. 座屈条件式および座屈モード

変断面ばり両端部の境界条件より座屈条件式および座屈モードがえられる。2例を示す。

(1) 両端単純支持ばり　$[\,y(0)=M(0)=y(1)=M(1)=0\,]$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{2} a_{2kj}f_{3kj}(1)=0\ ,\quad y(\eta)=\theta(0)\left[\eta-\frac{1}{\alpha_1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{2} a_{2kj}f_{1kj}(\eta)u(\eta-\xi_k)\right],\quad \alpha_1=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{2} a_{2kj}f_{1kj}(1)$$

(2) 両端固定ばり　$[\,y(0)=\theta(0)=y(1)=\theta(1)=0\,]$

$$\begin{vmatrix} \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{2} a_{1kj}f_{1kj}(1) & \Sigma\Sigma a_{2kj}f_{1kj}(1) \\ \Sigma\Sigma a_{1kj}f_{2kj}(1) & \Sigma\Sigma a_{2kj}f_{2kj}(1) \end{vmatrix}=0\ ,\quad y(\eta)=M(0)\left\{\Sigma\Sigma a_{1kj}f_{1kj}(\eta)u(\eta-\xi_k)-\frac{\Sigma\Sigma a_{1kj}f_{1kj}(1)}{\Sigma\Sigma a_{2kj}f_{1kj}(1)}\Sigma\Sigma a_{2kj}f_{1kj}(\eta)u(\eta-\xi_k)\right\}$$

5. 固有値の収束性および精度

高さが直線的に変化するくさび形片持ばりについて算定された置換階段状変断面ばりの固有値 λ の収束性と精度を表-1に示す。

h_1/h_0	n+1: 10	20	30	40	50	60	Ref.(1)
0.2	1.676 15.7%	1.571 8.5%	1.533 5.8%	1.514 4.5%	1.503 3.8%	1.496 3.2%	1.449
0.8	3.869 1.5%	3.839 0.7%	3.828 0.4%	3.823 0.3%	3.820 0.2%	3.818 0.1%	3.814

表-1

6. 応用例

断面が連続的に変化する4種の変断面ばりの座屈固有値を図-2, 3, 4, 5に示す。置換階段状変断面ばりは原変断面ばりに外接し、各一様部分の長さは全て等しくした。一様部分の数は60個したがって $n=59$ で固有値を求めた。

図-2 ; $h(\eta)=h_0(1+\alpha\sin\pi\eta)$　，図-3 ; $h(\eta)=h_0[1-\alpha\cos\pi(\eta-\frac{1}{2})]$，図-4, 5 ; $h(\eta)=h_0(h_1/h_0)^{\eta}$

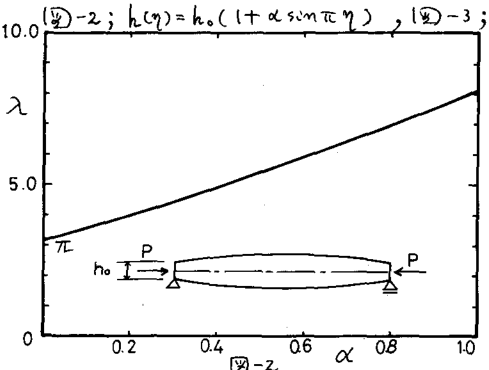

図-2

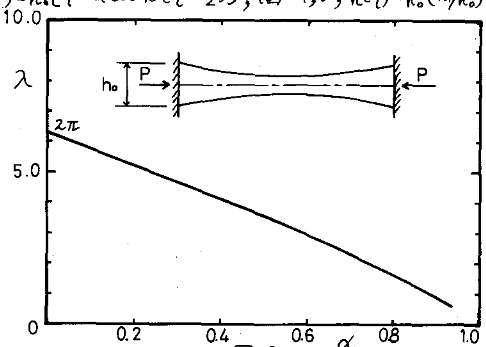

図-3

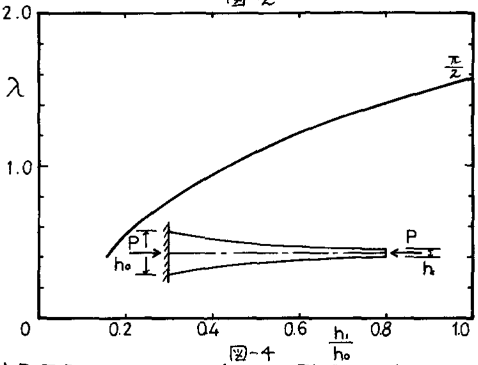

図-4

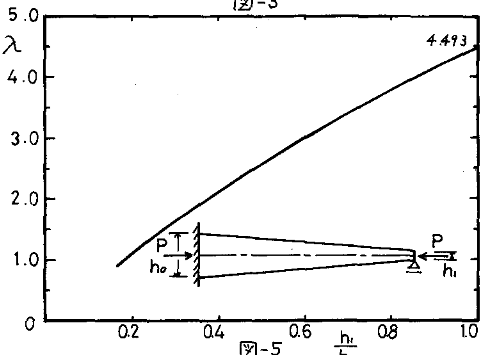

図-5

(1) D. J. Butler and G. B. Anderson, The Elastic Buckling of Tapered Beam-Columns. Welding Jnl. 42, 2?-S, 1963