

鹿見島高典 正員 斎藤 利一郎

号1, 序; さきに著者等は, 有孔ばり(カスネーテッドビーム)に関する研究として, 拡張比の変化と応力状態との関係と調べた。¹⁾ 今に, 種々の条件を与えて観察すると, 特異点(singular-point), すなわち, 主応力(σ_x , σ_y)の方向が不定となる点, あるいは, その方向が急激に変化する点がいくつか現われるのを知るのである。特異点が現われると主応力線図を描くのが容易でない。そこで, シのはりに現われる特異点と応力状態の関係を調べるために, シ実験を試みることにした。シシに, その結果の一部を報告するものである。

号2, 特異点について; 二次元問題の特異点に関して, 奥田²⁾, Frock³⁾等の研究がある。しかしながら, 著者の知るかぎり, カスネーテッドビームについて調べた例を知らないのである。

図-1に見るように, カスネーテッドビームは, はりのウェブに六角孔が列ぶシから, 載荷条件によって, 孔縁および孔頂点に著しい応力集中が認められる。応力集中の度合いが, はりの強度に重大な影響をおよぼすことは明らかである。また, シの応力集中の度合いに次いで, シで言う特異点が現われるシから, シシによる影響をも考慮する必要があると考える。いま, 平面応力状態を考へて, ある点が特異点となる条件式は, 直角座標を x, y , それに対応する平面応力の成分をそれぞれ, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ とすれば, 主応力軸を定める式について次の関係がある。

$$\tan 2\theta = 2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y) \quad \text{----- (1)}$$

さて, 式(1)より, 主応力の方向(θ)が不定となる条件を調べると次の通りである。

(i), ゼロ点: $\tau_{xy} = 0, (\sigma_x - \sigma_y) = 0$, (ii), 極: $\tau_{xy}, (\sigma_x - \sigma_y)$ の一方, または両方が無限大。iii), 不連続点: $\tau_{xy}, (\sigma_x - \sigma_y)$ のいずれかが不連続となる点が考えられよう。シシに, 対象とするはりに見られるのは, 大よそ(i), (ii)であろう。(i)は, 暗視野の場合, 光弾性シマの中の単独の黒点($\sigma_x - \sigma_y$)として観察される。例えば, シの点, 孔縁および自由端縁に認められるとその点は, 応力の符号がかわる点, すなわち, 引張応力と圧縮応力の変り目となる。(ii)は, 集中荷重の載荷点, あるいは, 鋭い隅角部(孔頂点)などに著しい応力集中が認められる点などが考えられる。(iii)は, 外力(荷重)が不連続分布をなす点を意味するようである。したがって, 以上の条件の中, (ii), (iii)については, 載荷条件によって, 特異点の存在を予想し得る。(i)は, その性質のつとして, ある箇所に現われていたゼロ点がある条件によって存在と消失の現象を伴う場合がある。また, ある条件で1つの定まった経路をたどる現象がある。したがって, シマ次数の判断に当っては, シの点は一応考慮を払うシとが望ましい。シシは, シのはりを平面応力の状態として, 条件(i)のゼロ点近傍の応力および主応力軸について検討してみることにしよう。

周知の通り, 一般に平面応力状態での応力のつり合い方程式および適合条件式は次のように示される。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad \text{----- (2)}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad \text{----- (3)}$$

式(2)を満足するように Airy の応力函数 ϕ を用いるとそれを用いて応力は次のように表わされる。

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad \text{----- (4)}$$

式(4)は, 適合条件式(3)を満足しなけれはならない。式(4)を式(3)に代入すると応力函数 $\phi(x, y)$ が満足すべき方程式として2次方程式が得られる。

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad \text{----- (5)}$$

セロ点近傍の主応力曲線を検討するに、極座標 \$(r, \theta)\$ に書きかえると次のようになる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{----- (6)}$$

応力成分との関係を表わすと次のようになる。

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 H}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial \theta} \quad \text{----- (7)}$$

式(6)を満足し、極座標軸の原点を問題となるセロ点に選び、その近傍に別の特異点が見られないとし、変位の1価性を保つ解を \$\gamma\$ の級数に展開して求めるに次の式が得られる。

$$H = \frac{T}{2} r^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma^{m+2}}{m+1} \left[\frac{1}{m} \cdot L_m \cdot \cos(m\theta - \lambda_m) + \frac{M_m}{m+2} \cos\{(m+2)\theta - \rho_m\} \right] \quad \text{----- (8)}$$

ニに、\$m > 0\$ の整数、\$T, L_m, M_m, \lambda_m, \rho_m\$ は積分定数、\$L_m > 0, M_m > 0\$ である。式(8)より、それらの応力を算定すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma^m}{m+1} \left[-L_m \cdot m \cdot \cos(m\theta - \lambda_m) - M_m(m+2) \cos\{(m+2)\theta - \rho_m\} \right] \\ &\quad + T + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m+2}{m+1} \gamma^m \left[\frac{L_m}{m} \cos(m\theta - \lambda_m) + \frac{M_m}{m+2} \cos\{(m+2)\theta - \rho_m\} \right] \\ &= T + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma^m \left[\frac{2-m}{m+1} L_m \cos(m\theta - \lambda_m) - M_m \cos\{(m+2)\theta - \rho_m\} \right] \quad \text{----- (9)} \end{aligned}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} = T + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma^m \left[\frac{2+m}{m} L_m \cos(m\theta - \lambda_m) + M_m \cos\{(m+2)\theta - \rho_m\} \right] \quad \text{----- (10)}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial \theta} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma^m}{m+1} \left[-L_m \sin(m\theta - \lambda_m) - M_m \sin\{(m+2)\theta - \rho_m\} \right] \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m+2}{m+1} \gamma^m \left[-L_m \sin(m\theta - \lambda_m) - M_m \sin\{(m+2)\theta - \rho_m\} \right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \gamma^m \left[L_m \sin(m\theta - \lambda_m) + M_m \sin\{(m+2)\theta - \rho_m\} \right] \quad \text{----- (11)} \end{aligned}$$

ニに、\$L_m \neq 0, M_m \neq 0\$ とする最低の \$m\$ の値を \$n\$ とすれば、この \$n\$ はセロ点の次数といわれるもので、通常のセロ点では \$n=0\$ の場合である。

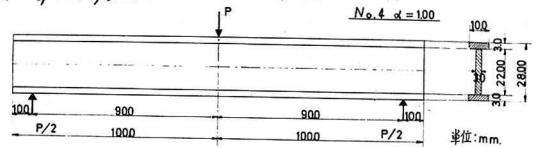


図-2.

表-1

実験 I	\$l_1\$	\$l_2\$	\$2\theta\$	\$2h\$	\$B\$	\$t_1\$	\$t_2\$	\$H\$	\$H_0\$	\$\alpha = H/H_0\$
NO.1	3.75	7.50	120°	13.00	10.0	3.0	3.0	34.5	—	1.23
NO.2	5.00	10.00	120°	17.32	10.0	3.0	3.0	36.68	—	1.31
NO.3	7.50	15.00	120°	26.00	10.0	3.0	3.0	41.0	—	1.46
NO.4	—	—	—	—	—	—	—	—	28.0	1.00

図3, 実験の概要: ニに取扱うカスナレーテッドビームは、図-1に見るように、切断→溶接されて作られる。通常、切断角度(\$\theta\$)は、\$0 < 90^\circ\$ の範囲が用いられることから、

ワイヤに列ぶ孔形は六角形である。ニにでは、拡張比 \$\alpha = H/H_0\$

(\$H_0, H\$, 図-1参照)の変化と特異点の関係を知るのに、フランジ付きの場合(実験I), フランジを省いた場合(実験II)の両方を試みた。ニに用いた材料は次の通りである。

まず、第2線から特異点を観察するものとて、市販のエポキシ樹脂(3mm, 6mm)板、光弾性感度 \$0.82 \text{ mm/kg}\$、等価曲線→主応力線の観察用には、低感度のアクリライト(3mm, 5mm)板を用いた。ワイヤ→フランジの接合は、それぞれ同じ材質の接着剤を用いた。

図-2は、実験Iの断面を示す。試験片は、図-1, 2を参照して、表-1に示す3種(N0.1~3)を作るにとした。写真-1, 2は、アクリライト板を用いた試験片(実験II)の例である。図-3, 表-2に実験IIの試験片の例を示す。

§4. 実験の結果および検討(図-4, 5, 写真3~13参照のと)、

写真-3~5は、実験I(N0.3)について、荷重をそれぞれ、\$P=15.9, 24.8\$,

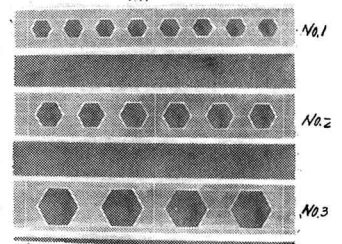


写真-1.

33.7 kgと変化させて、載荷点断面のゼロ点(黒点)の動きと、その点が

表-2

孔周縁に
現われる
のを調べ
るもので
ある。

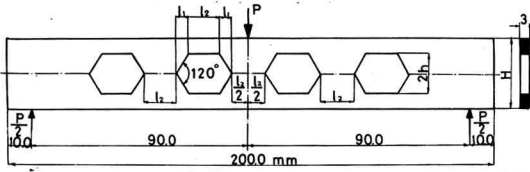


図-3

NO	h (mm)	H (mm)	$\alpha = \frac{H}{h_0}$	l_1 (mm)	l_2 (mm)	L (mm)
0	$H_0 = 20$		1.00	—	—	—
1	5	25	1.25	2.89	15.19	36.16
2	8	28	1.40	4.62	13.46	36.16
3	11	31	1.55	6.35	11.73	36.16
4	14	34	1.70	8.08	10.00	36.16

写真に見るように、孔周縁のゼロ点の動きが明らかである。

写真-6~9は、実験口の試験片 No.1~3 について、荷重を一定とした場合について、孔周縁の特異点を観察するものである。以上と全く同様に、ゼロ点が孔頂点→3 の方向に動くのが明らかである。

これは、さきにも述べ通り、応力の符号がかわる位置を意味する。ひびが大きいところにつれ、孔辺の中央に現われる傾向にある。実験によって得られるシマ模様は、たゞ、主応力差 ($\sigma_1 - \sigma_2$)、あるいは、最大せん断応力、 τ ($\sigma_1 - \sigma_2$) の等価線を示すことは、周知の通りであるが、構造物を実験で解析する際、本法を用いると、等価曲線群から得られる主応力線図が重要視される場合がある。

いま、本装置を直交偏光子のみとし、半波長板を省くと光の強度 (I) は次の式で示される。

$$I = A^2 \sin^2 2\phi \sin^2 \frac{\delta}{2} \dots (12)$$

すなわち、 A は偏光子を通過した偏光ベクトルの振幅、 δ : 位相差である。

すなわち、偏光子の主軸方向と試験片の主応力

写真-3

方向が一致すると、 $\phi = 0$ 、 $\phi = \frac{\pi}{2}$ では、 δ のいかんにかかわらず $I = 0$ (暗黒) となる。図-4 に実験口、No.3 の $I = 0$ の軌跡(等傾曲線群)の例を示す。これは、偏光子と検光子を直交位置とし、水平軸より偏光子の主軸の傾きを 5° 毎に傾け、 $0 \sim 90^\circ$ までを記録したものである。写真3~9を対比させると、ゼロ点には、全2の等傾曲線が放射状に集まり、観察・記録が容易でない。

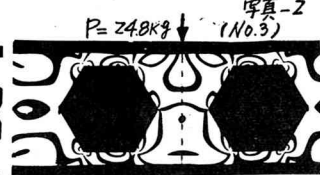


写真-2
(No.3)

写真-4



写真-5

図-5 は図-4 から得られる主応力線図を示す。ゼロ点近傍で等傾曲線がかたまり複雑になるため、主応力線図が不合理になる傾向がある。そこで、イエダのフジの接合線と上線、下線としてまとめている。

これは、等傾曲線を観察・記録する際、ある角度(主応力の傾き)では、等傾曲線の幅が広くなり、軌跡を半画きする場合、観察誤差を含むことが考えられよう。

この不合理になるのを除去するために、最近市販されている主応力線作成装置で写真処理をするために、主応力の傾きを $0^\circ \sim 85^\circ$ まで 5° 毎に撮影するといった。

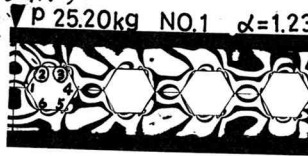


写真-6



写真-7

写真-9 にその例を示す。写真10~12 は、

実験口、No.1~3 を主応力線作成装置で写真処理したものである。

主応力線写真の中、イエダの暗黒の部分には、等価線写真のシマ波長の低いところを示している。したがって、載荷点断面に現われるゼロ点の位置が明らかである。1カ所だけ、写真に見るように、載荷点、および応力集中の著しい孔頂点で白くゆけ、逆に、シマ波長の低いところでは、暗黒となり、不明確になる



写真-8

傾向を示す。このことは、写真-10(等傾曲線写真)から明らかのように応力集中の著しい部分で偏光がオーバーになり暗黒になるものと思われる。すなわち、光の強度(光)に関係するものである。

写真法の原理については、文献(5)を参照のこと。

5. おおむね

以上の結果をまとめると次のようである。

(1)、応力状態を調べるときは、せん断力が支配的であれば、特異点には、かなりの応力集中が認められる。

したがって、条件(II)により頂点2, 3, 5, 6は、特異点の1つであることがわかる。

(2)、特異点(セロ点)が、ウエブにいくつか認められると、等傾曲線の継ぎ目記録には、継ぎ目線を含むものがある。

したがって、等傾曲線を用いて主応力を分析する方法および主応力線図の作画には、相当の注意を要とする。

(3)、応力函数 P 、および特異点の次数の検索、皮膜法 σ と λ の適用について検討する必要がある。

(4)、セロ点が、自由周縁に現れると応力の符号の変わり目となり、この点について応力留意することは望ましい。

(5) 最近、主応力線写真の作成法が研究開発されて、半面を占めて、写真法におきかえる方法が試みられているが、等傾曲線を撮影する際、コントラストの良好な写真が望まれ、特に、応力集中の著しい特異点あるいは、載荷点近傍では、撮影が困難である。

(6) 実験(II)についても同様の傾向を示す。実験(II)のトランジスタについては検討する必要がある。

(7)、特に、条断面については、セロ点の性質として、ある条件下、存在したものか、存在の消滅の現象を伴う場合がある。これは、写真-13に見るような載荷条件の対称軸上に現れるセロ点に相当する。実験を続けたところ、 $L/H > 4.24$ であればセロ点が現れる条件となる。(H0, 写真-13参照)

したがって、作られるオプティカルビームについて、このような条件の適用性について、現在検討中である。

参考文献

- (1) 村上、藤平野：オプティカルビームの実験的研究—高圧変化と孔の間隔について—、土木工学集報 第4巻6号
- (2) 奥田克己：二次元弾性問題における特異点、造船協会会報 第50号
- (3) M.M. Flocht: photoelasticity, Vol.1, Vol.2
- (4) 応力測定法：応力測定技術研究会編(朝倉書店)
- (5) 駒井他：光弾性における主応力線、せん断流線写真の作成法：応力と歪 Vol.1 No.1.
- (6) 須田、西田達：光弾性実験法：日刊工業新聞社
- (7) 第1回光弾性シンポジウム論文集 1972年12月：光弾性研究会

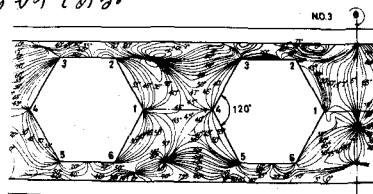


図-4

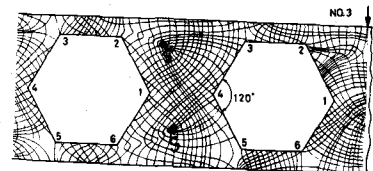


図-5



写真-13