II－4　マトリックスによる弾性理論の展開

福岡大学　正員　黒木健実

まえがき

つりあい条件式やひずみ－変位関係式などをマトリックス表示すると微小変位弾性理論が簡潔に説明できることを示す。この表示法はエネルギー原理と有限要素法の説明にも便利である。

記号・規約

弾性体を，弾性体の内部V，外力が与えられている境界面S_σおよび変位が与えられている境界面S_uの三つの部分に分ける（図-1）

内部Vの変位を$\mathbf{U}$，ひずみを$\boldsymbol{\varepsilon}$，応力を$\boldsymbol{\sigma}$，物体力を$\overline{\mathbf{F}}$とおく。

ただし

$$\mathbf{U}^T=[u \quad v \quad w]$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^T=[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]$$
$$\boldsymbol{\sigma}^T=[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]$$
$$\overline{\mathbf{F}}^T=[\overline{F}_x \quad \overline{F}_y \quad \overline{F}_z]$$

境界面S_σの与えられた外力を$\overline{\mathbf{T}}$，境界面S_uの与えられた変位を$\overline{\mathbf{U}}$とおく。ただし

$$\overline{\mathbf{T}}^T=[\overline{T}_x \quad \overline{T}_y \quad \overline{T}_z]$$
$$\overline{\mathbf{U}}=[\bar{u} \quad \bar{v} \quad \bar{w}]$$

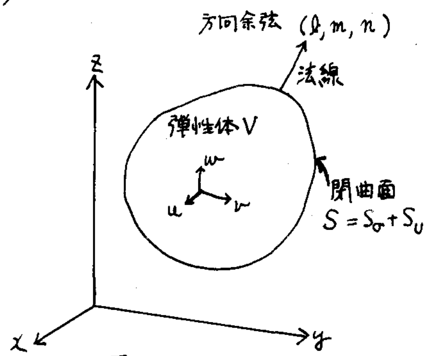


図-1

ここで偏微分記号 $D_x=\partial/\partial x$，$D_y=\partial/\partial y$，$D_z=\partial/\partial z$ を導入し，つぎのような計算規約をもうける。

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=D_x\sigma_x+D_y\tau_{xy}+D_z\tau_{zx}=[D_x \quad 0 \quad 0 \quad D_y \quad 0 \quad D_z]\boldsymbol{\sigma}$$

$$\iiint\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\int_V[D_x \quad 0 \quad 0 \quad D_y \quad 0 \quad D_z]\boldsymbol{\sigma}\,dV=\int_S[l \quad 0 \quad 0 \quad m \quad 0 \quad n]\boldsymbol{\sigma}\,dS$$

ただし l, m, n は方向余弦である。

基礎方程式

以上のことから弾性問題の基礎となる方程式がつぎのようにマトリックスで表わされることになる。

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{つりあい条件式} & \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}+\overline{\mathbf{F}}=\mathbf{0} & \\
\text{ひずみ－変位関係式} & \boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{D}^T\mathbf{U} & \\
\text{応力－ひずみ　〃} & \boldsymbol{\sigma}=\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} & \\
\text{境界条件式} & \mathbf{R}\boldsymbol{\sigma}=\overline{\mathbf{T}} & S_\sigma\text{上} \\
 & \mathbf{U}=\overline{\mathbf{U}} & S_u\text{上}
\end{array}\right\}\text{——————} (1)$$

ただし

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} D_x & 0 & 0 & D_y & 0 & D_z \\ 0 & D_y & 0 & D_x & D_z & 0 \\ 0 & 0 & D_z & 0 & D_y & D_x \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}=\begin{bmatrix} l & 0 & 0 & m & 0 & n \\ 0 & m & 0 & l & n & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & m & l \end{bmatrix}$$

等方性

$$\mathbf{E}=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} (1-\nu)/\nu & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (1-\nu)/\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & (1-\nu)/\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2\nu \end{bmatrix}$$

ひずみ－変位関係式をつぎのように変形して

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_I\\ \boldsymbol{\varepsilon}_{II}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{D}_I^T\\ \mathbf{D}_{II}^T\end{bmatrix}\mathbf{u} \qquad \text{ただし} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_I^T = [\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z], \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{II}^T = [\gamma_{xy}\ \gamma_{yz}\ \gamma_{zx}]$$

$$\mathbf{D}_I^T = \mathbf{D}_I = \begin{bmatrix} D_x & 0 & 0\\ 0 & D_y & 0\\ 0 & 0 & D_z\end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}_{II}^T = \begin{bmatrix} D_y & D_x & 0\\ 0 & D_z & D_y\\ D_z & 0 & D_x\end{bmatrix}$$

変位 $\mathbf{u}$ を消去すると適合条件式がえられる。すなわち，

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{II} = \mathbf{D}_{II}^T\mathbf{D}_I^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_I \quad , \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_I = \mathbf{D}_I(\mathbf{D}_{II}^T)^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{II}$$

ただし D_x, D_y, D_z は係数とみなす。

なお，式(1)は変数を適当に消去することにより，つぎのように変形できる。

$\boldsymbol{\varepsilon}$ 消去	$\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ 消去	$\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}$ 消去
$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$	$\mathbf{D}\mathbf{E}\mathbf{D}^T\mathbf{u} + \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$	$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$
$\mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^T\mathbf{u}$	$\mathbf{R}\mathbf{E}\mathbf{D}^T\mathbf{u} = \bar{\mathbf{T}}$	$\mathbf{E}_{II}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{II} - \mathbf{D}_{II}^T\mathbf{D}_I^{-1}\mathbf{E}_I^{-1}\boldsymbol{\sigma}_I = \mathbf{0}$
$\mathbf{R}\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{T}}$	$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$	$\mathbf{R}\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{T}}$
$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$		

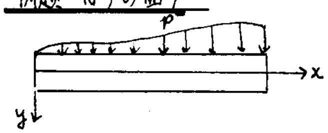
――(2)

ただし

$$\boldsymbol{\sigma}_I^T = [\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z], \qquad \boldsymbol{\sigma}_{II}^T = [\tau_{xy}\ \tau_{yz}\ \tau_{zx}]$$

$$\mathbf{E}_I^{-1} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu\\ -\nu & 1 & -\nu\\ -\nu & -\nu & 1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{E}_{II}^{-1} = \frac{2(1+\nu)}{E}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

例題　はりの曲げ



$$\begin{bmatrix} D_x & D_y\\ 0 & D_x\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \tau_y\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0\\ \bar{F}_y\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \tau_y\end{Bmatrix} = \pm\begin{Bmatrix}\bar{T}_x\\ \bar{T}_y\end{Bmatrix} \quad \text{右端で＋}\quad \text{左〃－}$$

$$\varepsilon_x = D_x u, \quad u = -D_x v\, y$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

$$\begin{Bmatrix} D_x v\\ v\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\bar{\theta}\\ \bar{v}\end{Bmatrix}$$

まず τ_y を，つぎに ε_x, σ_x を消去して部分積分すれば変位 v のみを変数とする方程式がえられる。その際

$$p = \iint \bar{F}_y\, dy\, dz$$

とする。

$$\Longrightarrow \quad D_x^2(EI\, D_x^2 v) - p = 0$$

$$\begin{Bmatrix} -EI\, D_x^2 v\\ -EI\, D_x^3 v\end{Bmatrix} = \pm\begin{Bmatrix}\bar{M}\\ \bar{Q}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} D_x v\\ v\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\bar{\theta}\\ \bar{v}\end{Bmatrix}$$

エネルギー原理

領域Vの変数 $\mathbf{u}$ と $\boldsymbol{\sigma}$ に関するGreenの公式はつぎのように表わされる。

$$\int_S \mathbf{u}^T\mathbf{R}\boldsymbol{\sigma}\, dS = \int_V \mathbf{u}^T(\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma})\, dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{D}^T\mathbf{u})\, dV \quad \text{――――} \quad (3)$$

この $\mathbf{u}$ と $\boldsymbol{\sigma}$ に物理的意味を与え，式(1)または式(2)を併用すると仮想仕事の原理など一連のエネルギー原理を証明することができる。

たとえば，変位が内部Vで $\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^T\delta\mathbf{u}$，境界面 S_u で $\delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$ を満足する仮想変位であるとすると式(3)は

$$\int_{S_\sigma} \delta\mathbf{u}^T\mathbf{R}\boldsymbol{\sigma}\, dS = \int_V \delta\mathbf{u}^T(\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma})\, dV + \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\, dV \quad \text{――――} \quad (4)$$

となるので，これと式(1)の $\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$，$\mathbf{R}\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{T}}$ から仮想仕事の原理がつぎのように導かれる。

$$\int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\, dV = \int_V \delta\mathbf{u}^T\bar{\mathbf{F}}\, dV + \int_{S_\sigma} \delta\mathbf{u}^T\bar{\mathbf{T}}\, dS \quad \text{――――} \quad (5)$$

式(5)は式(4)とつぎの仮想仕事式からも導くことができる。

$$\int_V \delta\mathbf{u}^T(\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{F}})\, dV + \int_{S_\sigma} \delta\mathbf{u}^T(\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{R}\boldsymbol{\sigma})\, dS = 0$$