II－2　骨組構造の動力学相似則に関する一考察

熊本大学　正員　○三池亮次
同上　正員　秋吉卓
同上　学生員　丸内進

1．要旨　多自由度系強制減衰振動を対象にして，振動現象を規定する諸無次元数と相似則を検討し，とくに減衰係数について若干の考察を行なったものである。

2．無次元振動方程式．　変位を $\mathbf{d}$ とし，速度 $\dot{\mathbf{d}}$ の n 乗に比例する減衰力が存在し，かつ，強制外力が，

$$f(t)=pe^{i\Omega t} \tag{1}$$

で与えられる多自由度系3次元振動方程式が，次式

$$\mathbb{M}\frac{d^2\mathbf{d}}{dt^2}+\mathbb{C}\left(\frac{d\mathbf{d}}{dt}\right)^n+\mathbb{K}\mathbf{d}=pe^{i\Omega t} \tag{2}$$

である場合の無次元振動方程式を誘導する。(1)式において，p，Ω は外力の振巾および円振動数，t は時間であり，(2)式の $\mathbb{M}$，$\mathbb{C}$，$\mathbb{K}$ は，おのおの，質量，減衰マトリックスおよび剛性マトリックスである。

基準部材の長さを l_0 として，変換マトリックス

$$\mathbb{L}_0=\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} \frac{1}{l_0} & \circ & \circ \\ \circ & \frac{1}{l_0} & \circ \\ \circ & \circ & \frac{1}{l_0} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

を定義し，$\mathbb{L}_0$ を対角小行列とするマトリックス $\mathbb{L}=\mathrm{diag}\{\mathbb{L}_0\}$ を(2)式の左より乗じ，かつ，

$$\mathbf{d}=l_0\mathbb{L}\mathbf{d}',\quad p'=\mathbb{L}p,\quad \mathbb{K}'=l_0\mathbb{L}\mathbb{K}\mathbb{L},\quad \mathbb{M}'=l_0\mathbb{L}\mathbb{M}\mathbb{L} \tag{3}$$

として，変位 $\mathbf{d}$ と外力 p の各要素の次元を合わせ，これを(2)式に代入し，基準部材の弾性係数，断面積，集中荷重および外力の円振動数を E_0, A_0, P_0, Ω_0 と表わせば，無次元振動方程式

$$\mathbb{M}^*\frac{d^2\mathbf{d}^*}{dt^{*2}}+\mathbb{C}^*\left(\frac{d\mathbf{d}^*}{dt^*}\right)^n+\mathbb{K}^*\mathbf{d}^*=p^*e^{i\Omega^*t^*} \tag{4}$$

を得る。ここに，

$$\mathbb{M}^*=\frac{\Omega_0\mathbb{M}'}{E_0A_0},\quad \mathbb{K}^*=\frac{\mathbb{K}'}{E_0A_0},\quad \mathbb{C}^*=\left(\frac{\Omega_0 l_0}{E_0A_0}\right)^n P_0^{n-1}\mathbb{L}\mathbb{C}\mathbb{L}^n,\quad \mathbf{d}^*=\frac{E_0A_0}{P_0}\mathbf{d}',\quad p^*=\frac{p'}{P_0} \tag{5}$$

弾性棒の縦波の速さを $V_0=\sqrt{E_0/\rho_0}$ とし，円振動数の基準値を $\Omega_0=V_0/l_0=\sqrt{E_0/\rho_0 l_0^2}$ とすれば，外力の円振動数の無次元数として，ストローハル数 $\Omega^*=\Omega/\Omega_0=\Omega l_0/V_0$ を得，無時元時間および無次元質量マトリックスは，

$$t^*=\Omega_0 t=\frac{V_0 t}{l_0},\quad \mathbb{M}^*=\frac{\mathbb{M}'}{\rho_0A_0l_0} \tag{6}$$

となる。$\mathbb{K}^*$ および $\mathbb{M}^*$ を構成する形状および材質に関する無次元数については，すでに発表のとおりである。なお，ρ_0 は基準部材の質量である。

2．相似解析

(a)．応答周期，固有振動数．　強制，減衰振動の場合　二組の構造システムI，IIの無次元数 $\mathbb{M}^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{K}^*$, p^* と，初期条件および境界条件に関する無次元数が等しく，かつ，外力の無次元円振動数 $\Omega_I^*=\Omega_{II}^*$ である場合，(4)式より，$t_I^*=t_{II}^*$ のとき，$d_I^*=d_{II}^*$ であるべきである。したがって，$d^*=0$ より，つぎの $d^*=0$ までの時間，すなわち，応答周期 T の無次元数 $T^*=\Omega_0 T$ に対して，$T_I^*=T_{II}^*$ で，応答としての無次元円振動数は，$\omega^*=$

$\omega l_o / V_o$ である。この関係より，応答周期についての係数を f_T として，次式

$$T = f_T \frac{l_o}{V_o} = f_T \sqrt{\frac{\rho_o l_o^2}{E_o}} \tag{7}$$

を誘導することができる。

(b) 減衰が速度の1乗に比例する粘性減衰の場合　この場合の無次元減衰係数 $\mathbb{C}^*$ は，(5)式より

$$\mathbb{C}^* = \frac{\Omega_o l_o}{E_o A_o} \mathbb{LCL} = \frac{1}{\rho_o A_o V_o} \mathbb{LCL} = \frac{1}{m_o \Omega_o} \mathbb{LCL} \tag{8}$$

ここに，$m_o = \rho_o A_o l_o$ は基準部材の質量である。いま，減衰係数が $\mathbb{C} = \mu_o l_o \mathbb{C}'$ であるような粘性係数 μ_o を定義する場合，$\mathbb{C}'$ は無次元マトリックスとなり，形状，材質に関する無次元数，粘性係数 μ の μ_o に対する比 k_μ によって構成されるものと推定され，

$$\mathbb{C}^* = \frac{\mathbb{C}'}{R_o} \quad , \quad R_o = \frac{V_o l_o}{\nu_o} \quad , \quad \nu_o = \frac{\mu_o}{\rho_o} \tag{9}$$

の関係を得る。R_o は，一種のレイノールド数である。なお，減衰係数を c とする一自由度系減衰定数と多自由度系減衰定数

$$\beta = \frac{1}{2m\Omega_o} c \quad , \quad \mathbb{C}^* = \frac{1}{m\Omega_o} \mathbb{LCL} \tag{10}$$

を比較すれば，$\mathbb{C}^*$ は，多自由度系における減衰定数に対応するものであることがわかる。対数減衰比 Δ は，時间 t における変位 u_t と時间 $t+T$ における変位 u_{t+T} の比であり，対数減衰率を δ とすれば

$$\Delta = e^{-\delta} = \frac{u_{t+T}}{u_t} = \frac{u^*_{t+T}}{u^*_t} = \frac{u^*_{t^*+T^*}}{u^*_{t^*}} = e^{-\delta^*} \tag{11}$$

したがって，$\delta = \delta^*$ であり，$\mathbb{M}^*$, $\mathbb{K}^*$, $\mathbb{C}^*$ の等しい相似の構造物に対して，対数減衰率 δ もまた等しくなるべきであり，また，$\mathbb{M}^*$, $\mathbb{K}^*$ の等しい構造システムⅠ, Ⅱ に対して，$\mathbb{C}^* = 0$ の場合 $\delta = 0$，$\mathbb{C}^*$ が大きくなれば減衰が大きくなることから，対数減衰率 δ，あるいは減衰定数 β は，R_o に逆比例することが推察される。レイノールド数 R_o の基準部材長 l_o の代わりにスパン L をとり

$$R_o = \frac{V_o L}{\nu_o} = \frac{\sqrt{\rho_o E_o}\, L}{\mu_o} \tag{12}$$

であるから，δ あるいは β は，スパン L に逆比例するであろう。すなわち

$$\beta \propto \frac{\mu_o}{\sqrt{\rho_o E_o}\, L} \tag{13}$$

(7)式と(13)式より，容易に

$$\beta \propto \frac{\mu_o}{E_o T}$$

の関係を得，すなわち，粘性減衰の場合，相似の構造に対して，減衰定数 β は周期 T に逆比例するであろう。

(c) 減衰が速度の2乗に比例する場合　(8)式において，

$$\mathbb{C}^* = \left(\frac{\Omega_o l_o}{E_o A_o}\right)^2 P_o \mathbb{LCL}^2 = \frac{1}{(\rho_o A_o V_o)^2} P_o \mathbb{LCL}^2$$

であり，基準加速度を a_o，基準荷重 $P_o = \rho_o A_o l_o a_o$ を与え，$\mathbb{C} = \rho_o A_o \mathbb{C}'$ とおくことによって，

$$\mathbb{C}^* = \frac{1}{F_o^2} \mathbb{LC}'\mathbb{L}^2 \quad , \quad F_o = \frac{V_o}{\sqrt{a_o l_o}}$$

ここに，F_o は一種のフルード数であり，粘性減衰の場合と同様の考察により，$\delta \propto \dfrac{\rho_o a_o L}{E_o}$ となり，この場合減衰はスパン L に比例するものと思われる