I −22

動的レスポンスを求める一解析法

熊大　正員　平井一男
〃　〃　水田洋司
〃　学生員　○古賀洋治

はじめに.

従来の解析法によれば、塑性域でのレスポンスを求めるには新たに剛性マトリックスを作成する必要があり、計算が複雑である。本法は、この複雑さをなくし演算時間を短くするため、弾性域での剛性マトリックスを用いて塑性域での動的レスポンスを求めようとするものである。すなわち、弾性域から塑性域に移った時の非線型効果を外力として運動方程式に導入し、解析を行なう方法である。

I. 理論

強制力が作用した時の多自由度質点系の運動方程式をマトリックス表示すると（減衰項は省略）

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbb{w}}_n+\mathbb{K}\mathbb{w}_n=\mathbb{F}_n \tag{1}$$

ここに，$\mathbb{M}$：質量マトリックス，　$\mathbb{K}$：剛性マトリックス，$\mathbb{w}_n$：変形　，$\mathbb{F}_n$　：外力

(1)式を線形加速度法を用いて解くと

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{\mathbb{w}}_n&=\left(\mathbb{M}+\frac{\Delta t^2}{6}\mathbb{K}\right)^{-1}\left\{\mathbb{F}_n-\mathbb{K}\left(\mathbb{w}_{n-1}+\Delta t\,\dot{\mathbb{w}}_{n-1}+\frac{\Delta t^2}{3}\ddot{\mathbb{w}}_{n-1}\right)\right\}\\
\dot{\mathbb{w}}_n&=\dot{\mathbb{w}}_{n-1}+\frac{\Delta t}{2}\ddot{\mathbb{w}}_{n-1}+\frac{\Delta t}{2}\ddot{\mathbb{w}}_n\\
\mathbb{w}_n&=\mathbb{w}_{n-1}+\Delta t\,\dot{\mathbb{w}}_{n-1}+\frac{\Delta t^2}{3}\ddot{\mathbb{w}}_{n-1}+\frac{\Delta t^2}{6}\ddot{\mathbb{w}}_n
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

ここに，　Δt：時間刻み

便宜上，上式を次のように記号表示する

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{\mathbb{w}}_n&=\mathbb{A}\mathbb{F}_n-\mathbb{B}\\
\dot{\mathbb{w}}_n&=\mathbb{C}+a\ddot{\mathbb{w}}_n=a\mathbb{A}\mathbb{F}_n-a\mathbb{B}+\mathbb{C}\\
\mathbb{w}_n&=\mathbb{D}+b\ddot{\mathbb{w}}_n=b\mathbb{A}\mathbb{F}_n-b\mathbb{B}+\mathbb{D}
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

ここに，$\mathbb{A}=\left(\mathbb{M}+\frac{\Delta t^2}{6}\mathbb{K}\right)^{-1}$，　$\mathbb{B}=\left(\mathbb{M}+\frac{\Delta t^2}{6}\mathbb{K}\right)^{-1}\mathbb{K}\cdot\left(\mathbb{w}_{n-1}+\Delta t\,\dot{\mathbb{w}}_{n-1}+\frac{\Delta t^2}{3}\ddot{\mathbb{w}}_{n-1}\right)$
$\mathbb{C}=\dot{\mathbb{w}}_{n-1}+\frac{\Delta t}{2}\ddot{\mathbb{w}}_{n-1}$，　$\mathbb{D}=\mathbb{w}_{n-1}+\Delta t\,\dot{\mathbb{w}}_{n-1}+\frac{\Delta t^2}{3}\ddot{\mathbb{w}}_{n-1}$，　$a=\frac{\Delta t}{2}$　，$b=\frac{\Delta t^2}{2}$

いま，図-1に示すように復元力特性を Bi-Linear 型とすると、塑性域（AB区間）での運動方程式は

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbb{w}}_n+\mathbb{K}\mathbb{w}_n=\mathbb{F}_n-\Delta\mathbb{K}(\mathbb{w}_n-\mathbb{w}_e) \tag{4}$$

ここに，　$\Delta\mathbb{K}$：塑性域での剛性の変化量

また、外力が $\mathbb{F}_n+\Delta\mathbb{F}_n$ の時の運動方程式は

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbb{w}}_n+\mathbb{K}\mathbb{w}_n=\mathbb{F}_n+\Delta\mathbb{F}_n \tag{5}$$

(5)式を線形加速度法により解くと

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{\mathbb{w}}_n&=\mathbb{A}(\mathbb{F}_n+\Delta\mathbb{F}_n)-\mathbb{B}\\
\dot{\mathbb{w}}_n&=a\mathbb{A}(\mathbb{F}_n+\Delta\mathbb{F}_n)-a\mathbb{B}+\mathbb{C}\\
\mathbb{w}_n&=b\mathbb{A}(\mathbb{F}_n+\Delta\mathbb{F}_n)-b\mathbb{B}+\mathbb{D}
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

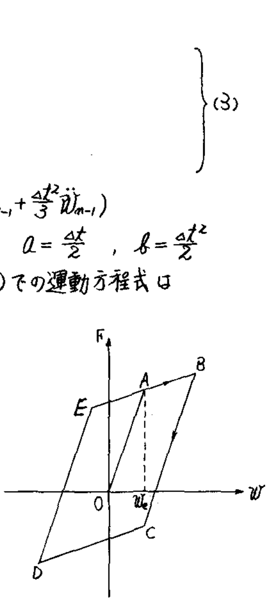


図-1 Bi-Linear 型復元力特性

また、(4)式(5)式の比較より

$$\Delta \mathbb{F}_n = -\Delta \mathbb{K}(\mathbb{W}_n - \mathbb{W}_e) \qquad (7)$$

を満足するように$\Delta \mathbb{F}$を決めることが出来れば、弾性の式を用いて塑性の問題を解くことが出来る。この$\Delta \mathbb{F}$は(6)式の第3式と(7)式の関係を用いて決めることが出来る。

$$\Delta \mathbb{F}_n = -\Delta \mathbb{K}\{\ell \mathbb{A}(\mathbb{F}_n + \Delta \mathbb{F}_n) - \ell \mathbb{B} + \mathbb{D} - \mathbb{W}_e\}$$

$$\Delta \mathbb{F}_n = -(\mathbb{I} + \ell \Delta \mathbb{K} \mathbb{A})^{-1} \Delta \mathbb{K} \cdot (\ell \mathbb{A} \mathbb{F}_n - \ell \mathbb{B} + \mathbb{D} - \mathbb{W}_e) \qquad (8)$$

(5)式(8)式でわかるように、塑性域のレスポンスを弾性の運動方程式を用いて求めることが出来る。

Ⅱ.数値計算例

図-2に示す1自由度の質点－バネ系のモデルで解析を試みた。復元力特性は図-1に示すBi-Linear型ではなく、便宜上、図-3に示すようなものを使用した。表-1には図-2のモデルの諸元を、図-5には本法と厳密解の比較を示している。また、外力は図-4に示すstep-function状の力を作用させた。

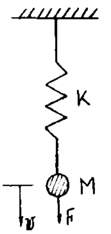


図-2. 1自由度質点－バネ系

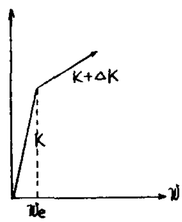


図-3. 復元力特性

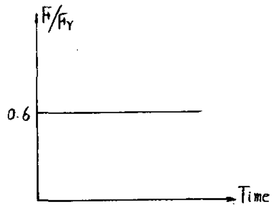
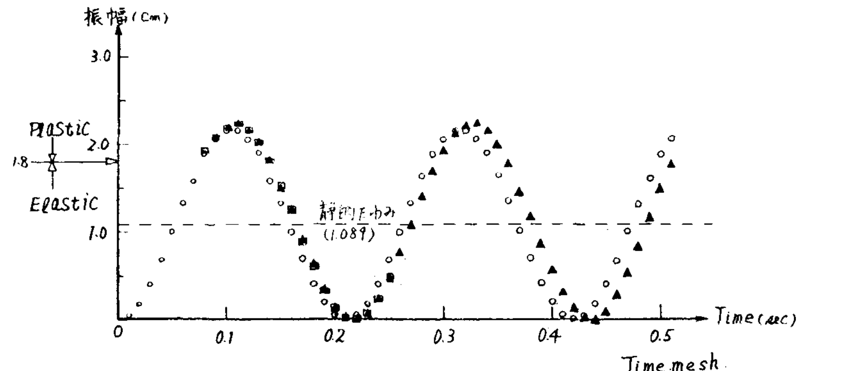


図-4. 外力

諸元		
バネの剛さ	弾性域	9000Kg/m
	塑性域	4500Kg/m
質量		10Kg·sec²/m
外力		18 Kg

表-1. モデルの諸元



○ Elastic Response (L.A.M)

△ Elasto-Plastic Response (本法、L.A.M)

▲ Elasto-Plastic Response By Stiffness Modified Method (L.A.M)

□ Elasto-Plastic Response (厳密解)

図-5. レスポンスの比較

参考文献

1. 小高昭夫著「耐振構造の総合研究」
2. I.Hirai, T.Yoshimura and K.Takamura 'On a Direct Eigenvalue Analysis for Locally Modified Structures', Int.J.of Numerical Method in Engineering Vol 6. 441~442 (1973)