

応力集中を求める一解析法

熊本大学

 正員 平井一男
 正員 水田洋司
 学生員 ○渡辺了栄

(I) まえがき

構造物に切り欠きや亀裂があれば、そこに応力集中が起こる。ここでは、どのような力が蓄積されるために応力集中が発生するのかわかる。また、応力が集中するようすがマトリックスの形で表現できないだろうかということも調べた。この研究は、外力 F の他に特殊な外力 ΔF (これから補助外力と呼ぶ) を構造物に載荷して解析を行っている。

(II) 理論

SYSTEM-A は切欠き部をもつ系とする。SYSTEM-B は与系に切欠き部をつけたものとする。このSYSTEM-B において、SYSTEM-A の切欠きに相当する所に補助外力 ΔF を加えることにより、SYSTEM-A と同じ境界条件を作り出し得れば SYSTEM-B で SYSTEM-A が解析できる。

さて、SYSTEM-C (SYSTEM-A の境界節点 L_1 付近をわかりやすくしたもの) の境界節点 L_1 に作用している力の釣合いについて考えてみよう。境界節点 L_1 に作用している内力としては、本体 A_1 が境界節点 L_1 に及ぼす節点力 S が作用していて、外力としては、外力の一部 $\Delta F'$ (外力 F のうち境界節点 L_1 に作用している力) が作用している。ところが、これらの内力と外力は釣合いの条件を満足しているはずであるから、次式が成立する。

$$\Delta F' = S \quad (1)$$

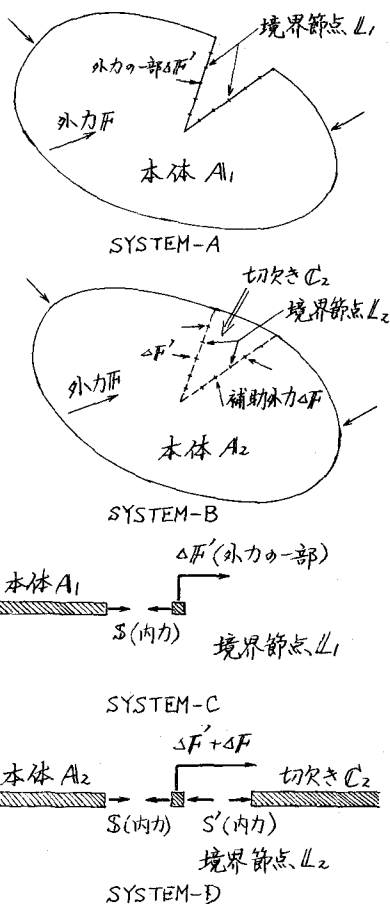
次に、SYSTEM-D (SYSTEM-B の境界節点 L_2 付近をわかりやすくしたもの) の境界節点 L_2 に作用している力の釣合いについて考える。内力としては、本体 A_2 (SYSTEM-B 中の SYSTEM-A に相当する部分) が及ぼす節点力 S と切欠き C_2 が及ぼす節点力 S' が作用している。外力としては、外力の一部 $\Delta F'$ にさらに補助外力 ΔF を作用させると次式が成立する。

$$\Delta F' + \Delta F = S + S' \quad (2)$$

ここに、 $S' = \Delta K K^{-1} (F + \Delta F)$ で、

ΔK : 切欠き C_2 のみの剛性マトリックス, K : SYSTEM-B の剛性マトリックス, F : 外力
 SYSTEM-B に SYSTEM-A の境界条件を満足させるためには次式が成立しなければならない。

$$\Delta F = S' = \Delta K K^{-1} (F + \Delta F) = \Delta K K^{-1} F + \Delta K K^{-1} \Delta F \quad (3)$$



(3) 式の ΔK には、要素のみの行や列が多くて (3) 式とそのまま計算して ΔF を求めると演算時間が長くなるので次のように簡単にする。

$$\overline{\Delta F} = \overline{\Delta K K'^T F} + \overline{\Delta K K'^T \Delta F} \quad (4)$$

ここに、 $\overline{\Delta K}$ は ΔK において少なくとも一つの要素が零でない行と列からなるマトリックスとし、切り欠き $\odot_2$ 内の内部節点に関する行を取り除いたものであり、 $\overline{K'^T}$ は K'^T において $\overline{\Delta K}$ と同じように修正するが、切り欠き $\odot_2$ の内部節点に関する列を取り除いたものである。また、 $\overline{\Delta F}$ と $\overline{K'^T F}$ は境界節点 $\odot_2$ に関するものからなるベクトルである。故に、(4) 式は次のようになる。

$$\overline{\Delta F} = (\overline{I} - \overline{\Delta K K'^T})^{-1} \overline{\Delta K K'^T F} \quad (5)$$

SYSTEM-B において (5) 式で求める補助外力 ΔF を外力 F とともに載荷すれば SYSTEM-A の応力集中状態を得る。次に、 $\overline{\Delta F}$ の次元と外力 F の次元に拡大したものを $\widetilde{\Delta F}$ において変位 δ を求める。

$$\delta = K'^T (F + \widetilde{\Delta F}) \quad (6)$$

(Ⅲ) 数値計算例

数値計算は下のモデル (Fig-1) で行った。SYSTEM-A (外力 F) と SYSTEM-B (外力 F と補助外力 ΔF) の両方について応力を比較したら全く同じ値となった。なお、モデルの諸元は表-1 の通りである。Fig-2 は補助外力 ΔF の成分を一つ一つ載荷して、切り欠き付近の要素の σ_x (x 方向の応力) の値をプロットしたものである。

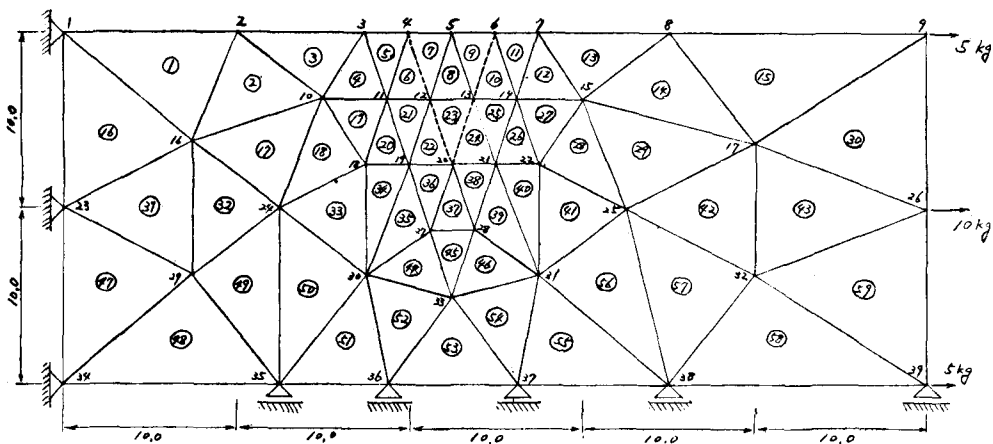


Fig-1 解析モデル

ヤング率	21000 kg/mm ²
ポアソン比	0.3
板厚	1 mm
縦×横	20×50 mm
外力	5, 10, 5 kg

表-1 モデルの諸元

参考文献

コンピュータによる
構造工学講座 I-1⑧
有限要素法による構造
解析プログラム

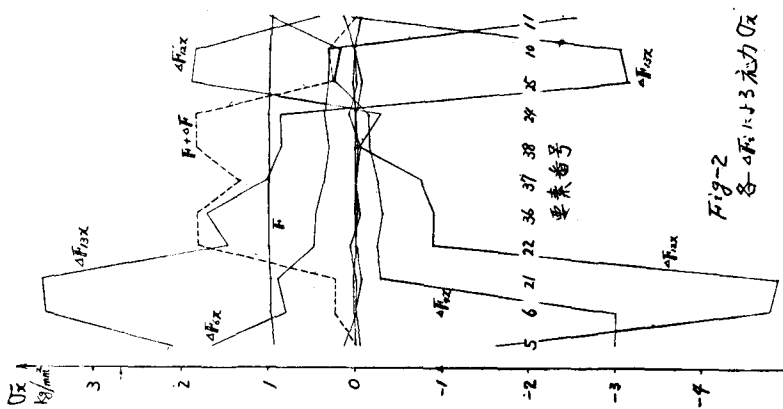


Fig-2
8- ΔF による応力 σ_x