I－18　　*Hvorslev*則の基本的是正

九州大学農学部　正員　樋口公一

1. まえがき

軟化挙動を示す過圧密土に関して同一の状態から負荷するさいの降伏応力は近似的にCoulomb・Mohr則で表わしうることは古くから認められている。しかるに、同じ集合粒子群（個々の粒子は不均一でよい）からなる飽和土においても、初期間ゲキ比が異なる場合には本則で定義される粘着力は異なるが（さらに厳密には内部マサツ角も一定ではないが）、従前、これらの強度定数と間ゲキ比の関係は不明で、初期間ゲキ比の異なる土は異なる強度常数を持つ材料として取り扱わざるを得なかった。1937年に至って、Hvorslevにより、同じ集合粒子群からなる粘性土に関して初期状態の相違によらず、降伏応力特性を統一的に表現する試みがなされ、粘着力を(降伏時の)間ゲキ比の関数とし、また内部マサツ角はこれによらず集合粒子群により決まる材料定数という形で具体的提案が行われた。しかるに、このHvorslevの提案則には間ゲキ比そのものが含まれ、降伏時の間ゲキ比は未知であるので、本則独自では降伏応力は把握し得ず、本則は実際問題の解析において非力であることは周知の通りである。つまり、降伏条件式はある状態から負荷する場合の降伏応力をその式独自で明らかにしうるものでなければならず、この意味でHvorslev則は降伏条件式たりえず、単に、降伏時に成り立つ応力と間ゲキ比の間の一つの関係式にすぎないと云える。また、以下に明らかにするように降伏時における一関係式としても実状に適合しないものであるが、本則に対して多年、称賛・批判が繰り返されつつも、未だに、これにとって変り得る妥当な提案はなされていない。以下においては、Hvorslevの提案則を省察しつつ、本則におけるような基本的欠如がなく、また、Coulomb則の簡潔さを損なわない軟化応力域における降伏条件式の具体的提案を行なっておく。なお、以下では、間ゲキ比 e の代わりに体積比 $V=1+e$ により説明する。また、応力および歪の符号は全て引張を正とする。さらに、構成粒子は非圧縮性で、且つ、互いに点接触（あるいは無接触）しているとし、応力は全てTerzaghi博士が提案された有効応力を意味するものとする。

2. Hvorslev則の力学的意義について

上述のように、Hvorslevは先ず、Coulomb則における粘着力および内部マサツ角に相応するものとして降伏時の間ゲキ比により変化する有効粘着力 c' および集合粒子群により決まる有効マサツ角 ϕ' を想定し、さらに、それ以前に彼の偉大な師Terzaghiが提案していた間ゲキ比 e と一軸正規圧密圧力 σ_e の対数との間の線型関係に着目し、c' を σ_e に関係づければ、c' を e の関数として具体的に表わしうると考えた。そこで、ある軟化降伏状態における c' はその状態におけると同一の e において一軸圧密降伏させるに必要な σ_e に比例するとし*、土要素は体積比 V、そこにおけるいずれかの面上のせん断応力 τ および垂直応力 σ が次の関係を満たすとき、軟化降伏** すると提案した。

---

* 軟化降伏強度と一軸圧密降伏強度に関して、(降伏時の)間ゲキ比が両者において同一である場合を比較すると、これらの間に、常に相似性ともいえる関係があると仮定したとも解釈しうる。

** 歪空間においてある一つの歪成分のみが変化するような直線歪径路試験に基づく諸実測資料によれば、応力空間においてcritical stateより過圧密な領域に応力ベクトルが存在する場合には変化する歪成分に対応する応力成分はピークを生じたのち単調に低下して次第に定値に（critical stateに）近づく。このピークを生じた時点では一般に歪は小で、これを近似的に弾性歪とみなしうる。さらに、その状態において上降伏点に到達し、その后、歪軟化を来たすと解される。Hvorslevは塑性理論においては使われないFailure（破壊）という言葉を用いているが、上降伏点に到達した時点をFailureとしているようであるので、軟化降伏と解しておく。なお、critical stateより正規圧密側において塑性変形を履歴したのち、応力成分が単調に増大して定値に近づく状態（通常、critical stateに到達する）に対してもFailureなる言葉を使っている場合を見受けるが、不適切であり、これを前者と同列に扱うことは力学的に無意味である。このような混同の卑近な例として“正規粘土は粘着力を持たない”ということをしばしば耳にする。いずれにせよ、無条件に感覚にのみうったえて、最大値にのみ執着し、力学的論理性から思考を遠ざける一因をなしている“Failure”なる言葉は使わない方がよいと私は思う。

$$\tau = c' - \sigma \tan \phi' \qquad (1)$$

ここに、一軸正規圧密における圧縮指数 λ' および水状態における小圧力 σ_{es} に対する体積比 V_s' により、一軸正規圧密特性は Terzaghi の提案式

$$V = V_s' - \lambda' \ln(\sigma/\sigma_{es}) \qquad (2)$$

で与えられるとし、本関係および集合粒子により決まる材料定数 K'（Hvorslev は粘着係数と称した）により、c' は次式で与えられる。

$$c' = K' \sigma_e \qquad (3)$$

$$\sigma_e = \sigma_{es} \exp\left[\frac{V_s' - V}{\lambda'}\right] \qquad (4)$$

さて、降伏応力は塑性変形の進行によって変化し、弾性変形のみによっては変化しないことはいうまでもない。故に、降伏応力は塑性歪履歴パラメータ（硬化、Bauschinger 効果、塑性異方性などを生ぜしめるもので、塑性歪増分（ある場合には塑性仕事増分）の関数の積分値）にのみ関係し、これらの間に成り立つ関係式を降伏条件式と称し、また、本式には弾性変形のみによって変化しうるパラメータを含んではならないこともいうまでもない。しかるに、Hvorslev 則には弾性変形のみによって変化しうるパラメータ V を含んでおり、彼がしばしば図示しているように、$V = const.$ とすれば、$\sigma - \tau$ 面において本則は直線で示されるが、これらの直線は Yield Locus ではなく、体積一定の条件下における応力経路を示しているといえる。降伏条件式はそれに含まれる塑性歪履歴パラメータを固定すると、応力空間において閉曲面－降伏曲面－を形成するが、これらの閉曲面は硬化、Bauschinger 効果、塑性異方性の状態が一定な条件における降伏開始時の応力状態面を示している点で "Yield Condition" と呼ばれるとすれば、Hvorslev 則は "Constant Volume Condition" と呼ぶにふさわしい。しかるに、弾性的な体積変化を生じない材料においては、これらの条件は一致し、Hvorslev 則を降伏条件式とみなすこともできる。しかし、土は充分、顕著な弾性的体積変化を生じるし、また、Hvorslev 自身、これを考慮したうえで、本則を提案していること顧慮すれば、実際的にも、また、形式的にも本則は降伏条件式ではないことになる。なお、Hvorslev 自身は彼の提案則を "Failure Condition" と称しているが、塑性理論において定義されている上述の Yield Condition ではなく、塑性状態において成り立つ一関係式 Constant Volume Condition と解すべきである*。

以上、Hvoreslev 則は降伏条件式ではないことを述べた。ところで、本則が Constant Volume Condition として、或いはこれから導びかれる降伏条件式が土の塑性挙動に適合しうるか否かという疑問が残る。これを明らかにするには多少の準備を要するので、後章に譲ることにする。

3. 準備事項

(1) 塑性条件式　土その他の粒子集合体においては体積比が小であるほど（同一応力状態において）、塑性変形が起こり難いと考えられる。故に、塑性的な体積歪 v^p を硬、軟化の測度とすれば、塑性（初期および後続の降伏）条件式は次式で与えられる。

$$\mathfrak{f}(\sigma_{ij}) - F(v^p) = 0, \qquad (5)$$

ここに、$\mathfrak{f}$ は応力 σ_{ij} の関数で、負荷応力関数と称し、また、F は v^p の関数で硬化関数と称する。なお、$\mathfrak{f}$ の符号は弾性域において $\mathfrak{f} < F$ となるように選ぶことにする。

さらに、応力 σ_{ij}^0 が加わっている初期状態（歪を零とする基準状態）における体積比を V_0、また、塑性変形履歴后、応力状態を σ_{ij}^0 に戻したときの体積比を $\bar{V}$ とすれば、$v^p = \ln(\bar{V}/V_0)$ であるから式(5)は次のようにも記述しうる。

$$\mathfrak{f}(\sigma_{ij}) - F(\bar{V}) = 0. \qquad (6)$$

(2) 硬化関数 $F(v^p)$ 決定に際しての注意事項　硬化関数 $F(v^p)$ の決定~~において~~は、刻々の応力状態および塑性歪状態を知り得る試験結果に基づいて、これらから塑性状態における $\mathfrak{f}(\sigma_{ij})$ 値と v^p（あるいは $\bar{V}$）の関係を規定することによりなされる。当然の事ながら、次章に詳述する等方圧密試験によらずとも、このようなことを実施するならば、どのような試験によってもよい。

処で、Hvorslev 式のよりどころである一軸圧密試験においては、精度の良い情報を得ることが難しい（一軸圧密試験機の場合は側方圧すら分らない）こともさることながら、塑性変形后は一般に側方へ塑性的伸び歪 ε_l^p を生じ（弾性的側方伸び歪 ε_l^e と絶対値等しく符号反対）、一軸圧 σ_a を初期

* Yield Condition と Constant Volume Condition との混同は正規圧密近傍の領域における硬化挙動に関する Roscoe 等の初期の概念にも見られ、その誤まりを Calladine が是正している。ただ、Calladine の叙述は一般的でなかった故か、それが特殊な問題における仮説のごとく受けとめられ、その后も Schofield & Wroth 等が多年、降伏条件式として $f(\sigma_{ij}, V) = 0$ といった記述を繰り返えしている。

値に戻しても側圧σ_tは元へは戻らない。すなわち、応力状態を初期状態σ_{ij}^0へ戻しえないので、v^P(あるいは$\bar{V}$)を規定できない*。一般に、不静定なこう束条件下の試験においては同様のことがありえるので、敢えて、このような試験によらずとも、簡単な応力制御試験を実施すべきである。なお、弾性歪を無視する場合には、$v=v^P$(あるいは$V=\bar{V}$)であるから、応力状態が把握されるものであれば、いかなる試験方法によってもよいことは云うまでもない。

4. Terzaghiの等方圧密特性関係およびCoulomb·Mohr則に基づく塑性条件式の提案

(1) Terzaghiの等方圧密$V-ln(-P)$線型関係に基づく塑性条件式　式(5)が適用しうる材料においては等方圧密試験により硬化関数$F(v^P)$を決定しうるので、以下においては$\mathcal{F}(\sigma_{ij})$のサイズを

$$\text{等方応力状態において}\quad \mathcal{F}(\sigma_{ij})=-P\ .\ (P<0), \tag{7}$$

を満たすように選ぶことにする。ここに、Pは等方応力である。したがって、ある任意の状態から負荷面内の応力経路を経て等方圧密降伏に至らしめるさいのPをP_eとすれば、その任意の状態に対するFは次式で与えられる。

$$F=-P_e\ , \tag{8}$$

さて、等方圧縮特性がTerzaghiの$V-ln(-P)$線型関係(図-1参照)に従うとすれば、等方応力状態において次式が成立する。

$$v^P=ln\left[1-(\lambda-\kappa)\,ln(P_e/P_y)/V_0\right], \tag{9}$$

$$\bar{V}-V_0=-(\lambda-\kappa)\,ln(P_e/P_y), \tag{10}$$

ここに、λおよびκはそれぞれ、正規圧密線および除荷再負荷線の包配を規定するもので、集合粒子群およびその初期状態により決まる材料定数とする。また、P_yは初期降伏応力値である。　以上の等方圧密塑性特性が適用しうるとし、さらに、偏差応力の作用下においても体積比の弾性的な変化特性は塑性変形に影響されないと仮定すれば、式(8)〜(10)を~~それぞれ~~式(5)および(6)に用いて塑性条件式は次のようになる。

$$\mathcal{F}(\sigma_{ij})-\mathcal{F}_0\exp\left[V_0\{1-\exp(v^P)\}/(\lambda-\kappa)\right]=0, \tag{11}$$

或いは

$$\mathcal{F}(\sigma_{ij})-\mathcal{F}_0\exp\left[(V_0-\bar{V})/(\lambda-\kappa)\right]=0, \tag{12}$$

ここに、$\mathcal{F}_0$は初期降伏時の$\mathcal{F}$値で$\mathcal{F}_0=-P_y$である。

さて、以下においては塑性変形に伴う粒子破砕その他の構成粒子自身の変化は無視しうるとし、同じ集合粒子群からなる飽和土においては応力状態、体積比、粒子配列様式などの初期状態によらず$\mathcal{F}(\sigma_{ij})$の関数形は同一で、また、初期および変形后の$\mathcal{F}(\sigma_{ij})$の大きさおよび弾性特性はある基準小応力状態σ_{ij}^sまで除荷したときの残存体積比$\bar{V}^s$により唯一に決まると仮定する(図-1参照)。本仮定により同じ集合粒子群からなる飽和土の弾塑性特性は同等となり、これらに対しては式(12)と類同の関係として次式が成り立つ。

$$V_0-\bar{V}=V_s-\bar{V}^s-(\lambda-\kappa)\,ln(\mathcal{F}_0/\mathcal{F}_s), \tag{13}$$

ここに、基準小応力状態σ_{ij}^sにおいて体積比がV_sである状態から負荷して塑性負荷状態に至る際の$\mathcal{F}$値を$\mathcal{F}_s$とす。とくに、等方塑性圧密に到達するとし、その応力値をP_{sy}とすれば、$\mathcal{F}_s=-P_{sy}$である。式(13)を(12)に用いれば、これらの材料に対する共通の塑性条件式として次式が成り立つ。

$$\mathcal{F}(\sigma_{ij})-\mathcal{F}_s\exp\left[(V_s-\bar{V}^s)/(\lambda-\kappa)\right]=0. \tag{14}$$

さらに、弾性的な体積比の変化は偏差応力に対して独立であると仮定すれば、次式が成立つ。

$$\bar{V}^s=\bar{V}+\kappa\,ln(P_0/P_s)=V_0\exp(v^P)+\kappa\,ln(P_0/P_s). \tag{15}$$

ここに、δ_{ij}をKronecke's deltaとして$P_0=\sigma_{ij}^0\delta_{ij}/3$, $P_s=\sigma_{ij}^s\delta_{ij}/3$である。

式(14)を式(15)に用いれば、塑性条件式はv^Pをパラメータとして次のように記述しうる。

$$\mathcal{F}(\sigma_{ij})-\mathcal{F}_s\left(\frac{P_0}{P_s}\right)^{-\frac{\kappa}{\lambda-\kappa}}\exp\left(\frac{V_s-V_0\exp(v^P)}{\lambda-\kappa}\right)=0. \tag{16}$$

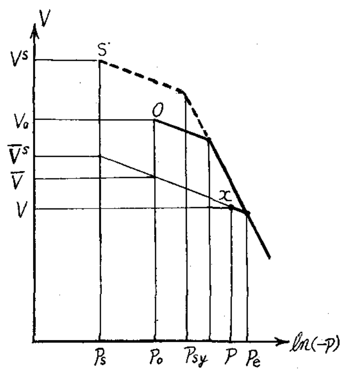

図-1 Terzaghiの$V-ln(-P)$線型圧密図

なお、ついで乍ら、Yield Conditionが式(14)あるいは(16)で与えられるのに対して、Constant Volume Conditionは$V=V^s-(\lambda-\kappa)\times ln(\mathcal{F}/\mathcal{F}_s)-\kappa\,ln(P/P_s)$なる関係を書き改めて次式で与えられる。

$$\mathcal{F}(\sigma_{ij})\left(\frac{P}{P_s}\right)^{\frac{\kappa}{\lambda-\kappa}}-\mathcal{F}_s\exp\left(\frac{V_s-V}{\lambda-\kappa}\right)=0. \tag{17}$$

(2) 具体的な塑性条件式の導出　本節では硬、軟化両応力域における負荷面を別個の負荷応力関数$\mathcal{F}(\sigma_{ij})$で表現するとし、とくに軟化応力域に対してCoulomb·Mohr則を採用する場合について、本応力域における塑性条件式を明らかにする。

* 側方変位の拘束を除去すれば、可能なことはいうまでもないが、これでは本質的には一軸圧密試験ではない。

さて、ある同一の初期状態（σ_{ij}^0, V_0）から負荷して軟化降伏するさいの応力は次のCoulomb-Mohr則で近似しうることは周知の通りである。

$$\frac{1}{\cos\phi}\left\{\left|\frac{\sigma_i-\sigma_j}{2}\right|+\frac{\sigma_i+\sigma_j}{2}\sin\phi\right\}-C=0, \tag{18}$$

ここに、$i, j=1, 2, 3$としてσ_1, σ_2およびσ_3は3主応力である。また、ϕおよびCは初期状態が同一であれば定数であり、それぞれ内部マサツ角および粘着力と称されているが、これらについては以下で詳察する。　　まず、負荷面は主応力空間において相似性を維持する（$\mathcal{F}(\sigma_{ij})$はσ_{ij}に関する同次関数でなければならない）と仮定すれば、ϕは材料定数でなければならないことになる。さらに、硬、軟化両域を通じての負荷面の相似性を仮定し、軟化応力域における負荷面の等方応力状態における（理論上の）圧力値をP_d（$\geqq 0$）とすれば、式(8)を参照し、kを材料定数として

$$P_d=-kP_e=kF, \tag{19}$$

でなければならない。しかるに、式(18)においては$P_d=C\cot\phi$であるから、これを式(19)に考慮して次式を得る。

$$F=C/K, \tag{20}$$

ここに、$K=k\tan\phi$である。式(18)および(20)を塑性条件基本式(5)に考慮すれば、負荷応力関数$\mathcal{F}(\sigma_{ij})$は具体的に

$$\mathcal{F}=\frac{1}{K\cos\phi}\left\{\left|\frac{\sigma_i-\sigma_j}{2}\right|+\frac{\sigma_i+\sigma_j}{2}\sin\phi\right\}, \tag{21}$$

で与えられる。本式を(16)（あるいは(14)）および式(17)に代入すれば、軟化域におけるそれぞれYield ConditionおよびConstant Volume Conditionが陽に示される。なお、材料定数K, ϕ, λ, κ, 基準状態量（P_s, V_s, $\mathcal{F}_s$）および初期状態量（P_0, V_0）、さらに塑性体積歪v^pが既知ならば、式(16)および(21)により降伏応力を把握しうる。また、基準状態（P_s, V_s）を指定しておけば、$\mathcal{F}_s$（$=-P_{sy}$）も材料定数とみなしうる。

なお、式(21)を式(14)に用いて得られる関係をCoulomb則の形式に書けば次の通りである。

$$\frac{1}{K}(\tau+\sigma\tan\phi)-\mathcal{F}_s\exp[(V_s-\bar{V}^s)/(\lambda-\kappa)]=0. \tag{22}$$

5. Hvorslev則から導びかれる降伏条件式について

前章(2)節で述べたように、一軸圧密試験は弾性歪を考慮した適切な硬化関数を把握するには不適切な試験法である。しかるに、側方塑性歪ε_l^pが無視しえて$v^p=\varepsilon_a^p$とみなしえ、かつ$\sigma_a=P\{1-2(K_0-1)/(1+2K_0)\}$（$K_0=\sigma_l/\sigma_a$）であるから弾塑性両状態を通じて$K_0$値が一定である場合には$\lambda=\lambda'$および$\kappa=\kappa'$（$\kappa'$は一軸圧密試験における除荷・再荷線の勾配）となり、一軸圧密試験における$V-\ln(-\sigma_a)$関係は等方圧密試験における$V-\ln(-P)$関係と同等となる。本場合には前章の諸式、例えば式(22)は次のように書きうる。

$$\frac{1}{K}(\tau+\sigma\tan\phi)-\sigma_{es}\exp[(V_s'-\bar{V}^s)/(\lambda'-\kappa')]/\{1-2(K_0-1)/(1+2K_0)\}=0, \tag{23}$$

しかし、必ずしもその保証はないので、硬化関数の決定においては等方圧密試験その他の応力を制御しうる試験に基づくのが望ましい。それとともに、一面セン断、平面歪試験その他においては$\bar{V}$あるいは$\bar{V}^s$を把握するさいに側方変位を可能にし、σ_{ij}^0またはσ_{ij}^sへ完全除荷しうる型式が望まれる。

さて、Hvorslev則は形式的にはConstant. Volume Conditionであることは前に述べたが、上述の2つの条件が成立つとして式(1), (3)および(4)に$V=\bar{V}^{s'}-\kappa'\ln(\sigma/\sigma_{es})$の関係を考慮するとHvorslev則を形式上Yield Conditionとして認めうる形に改めた次式を得る。

$$\frac{1}{K'}(\tau+\sigma\tan\phi')(\sigma/\sigma_{es})^{-\frac{\kappa'}{\lambda'}}-\sigma_{es}\exp\left[\frac{V_s'-\bar{V}^{s'}}{\lambda'}\right]=0 \tag{25}$$

本式においては、もはやCoulomb則の簡潔さである$\sigma-\tau$線型関係が損われていると共に、多くの実測値に反して$\sigma-\tau$面においてσ軸に向って凸な曲線群となる。故に、式(25)の原形であるHvorslev則はConst. Volume Conditionとしても土の実状に適しえないと判断される。

6. 粘着力その他について

ここに明らかにした所論においては、$\bar{V}^s$が一定ならば、粘着力$C$$\left(=K\mathcal{F}_s\exp\left[\frac{V_s-\bar{V}^s}{\lambda-\kappa}\right]\right)$は一定である。即ち、ある同一の負荷面内のいかなる状態、例えば、等方或いは一軸圧密図における、ある同一の除荷・再荷線上のいかなる状態から負荷する場合にも粘着力Cは一定である。然るに、Hvorslev則においは、同一の体積比および応力状態から負荷する場合でさえ降伏に至るまでの負荷経路によって有効粘着力$C'$$\left(=K'\sigma_{es}\exp\left[\frac{V_s'-V}{\lambda'}\right]\right.$あるいは$\left.K'\sigma_{es}(\sigma/\sigma_{es})^{\frac{\kappa'}{\lambda'}}\exp\left[\frac{V_s'-\bar{V}^{s'}}{\lambda'}\right]\right)$は異なることになる。なる。また、HvorslevはK', $\sigma_{es}\exp\left[\frac{V_s'-V}{\lambda'}\right]$, ϕ'および$K'\sigma_{es}\exp\left[\frac{V_s'-V}{\lambda'}\right]$をそれぞれ粘着力係数、等価圧密圧力、有効マサツ角および有効粘着力と名付けているが、むしろ、ここに明らかにしたK, $\mathcal{F}_s\exp\left[\frac{V_s-\bar{V}^s}{\lambda-\kappa}\right]$（$=F$）, ϕおよび$K\mathcal{F}_s\exp\left[\frac{V_s-\bar{V}^s}{\lambda-\kappa}\right]$が理論的に矛盾がなく、また、土の降伏挙動をより適切に説明しえ、Hvorslevの名付けたそれぞれの名にふさわしいものである。

7. あとがき

ここに述べた諸論は一昨年の夏、私が始めて土質工学会に出席した折りに、その概略を報告していたが、塑性力学的に見れば余りにも周知のことのように思え、別段改めて公表する要もなかろうと感じていた。

然し、いずれのテキスト、ハンドブック更には極く最近の研究論文等においてもHvorslev則が相も変らぬ形で評価されているのを見かねて、茲に再び筆を執った次才である。若し、何方かが既でに明らかにしているならば、不勉強を恥じるところである。