

I. はじめに

特定の変動荷重を受ける弾性系が、ある条件のもとで激しく振動し不安定になる現象があり動的不安定問題と総称されているが、特に変動荷重が周期荷重の場合については多くの研究がなされている。一方変動荷重として不規則荷重を考えた研究も近年多くなりつつある。不規則変動荷重が作用した柱の安定性について、A. Leopold^①等はLiapunovの方法を用いた研究を行っている。Wirsching^②等はアナログシミュレーションにより、不規則軸力を受ける直柱および初期たわみのある柱の応答から安定範囲について論じている。本研究は、白色雑音状の変動軸力を受ける柱をモデルにして、モーメント方程式より導かれるRouth-Hurwitz^③の判別より得られる安定限界を参考にして、モーメント方程式を数値解析することにより、不安定後の挙動について考察し、さらにこの結果とデジタルシミュレーションによる値を比較、検討するものである。デジタルシミュレーションによる応答の種々の統計的特性については、理論計算の種々の仮定の妥当性について検討する場合重要になるものである。

II. 基礎式 (i) 変動軸力を受ける柱の不安定後の方程式

第1図のような座標系をとり、x方向の変位をu、y方向の変位をw
軸力をPとすると、柱に生ずる軸力N_xは次式で表わされる。

$$N_x = -P + EA/L \cdot \int_0^L (\partial w / \partial x)^2 dx \quad (1)$$

さらに、粘性減衰を考慮した運動方程式は次式で表わされる。

$$SA \ddot{w} + c \dot{w} - N_x \partial^2 w / \partial x^2 + EI \partial^4 w / \partial x^4 = 0 \quad (2)$$

ただし、 $\cdot$: 時間微分、EI : 曲げ剛性、A : 断面積、L : 柱長、 ρ : 密度、c : 減衰係数である。さらに柱の横振動の固有関数として $\phi_n(x)$ 時間に關する未知関数を $Q_n(t)$ 、断面二次半径をyとすると、横変位wは次式で仮定される。

$$w(x, t) = y \sum \phi_n(x) Q_n(t) \quad (3)$$

境界条件として単純支持の場合を考えると、固有関数は $\phi_n(x) = \sin n\pi x/L$ 、n次の固有振動数 $\Omega_n = (n\pi)^2 \sqrt{EI/AS}$ 、n次の座屈荷重 $P_{ncr} = EI(n\pi)^2/L^2$ となる。最低次数の振動のみに注目し、一次の座屈荷重で無次元化した、変動荷重を $\bar{P}(t)$ とし、一次の固有振動数を Ω とすると、運動方程式は次式になる。

$$\ddot{Q}(t) + 2\beta\Omega\dot{Q}(t) + \Omega^2 Q(t) - \bar{P}(t)\Omega^2 Q(t) + 1/4 Q(t)^3 = 0 \quad (4)$$

(ii) モーメント方程式の誘導

変動軸力として次のような性質をもった荷重を考える。

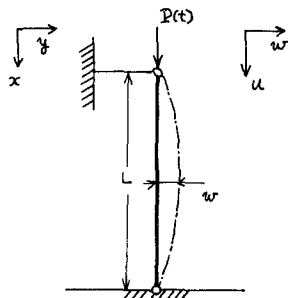
$$\bar{P}(t) = \bar{P}_0 + n(t) \quad (5)$$

n ; 無次元化した軸力の標準偏差、 $n(t)$; 分散が単位で、平均値0の正規性白色雑音
(4)式を一般化して、 $x_1 = x$ 、 $x_2 = \dot{x}$ の状態空間で運動を考えると(4)式は次のようになる。

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = -2\beta\Omega x_2 - \Omega^2(1 - \bar{P}_0 - n(t))x_1 - \epsilon f(x_1, x_2) \quad (6)$$

(6)式の x_1 と x_2 はマルコフベクトル $X = \{x_1, x_2\}$ を形成するので(6)式から次のFokker-Planckの式が得られる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} x_2 \rho - \frac{\partial}{\partial x_2} (2\beta\Omega x_2 + x_1 \Omega^2 - \Omega^2 \bar{P}_0 x_1 + \epsilon f(x_1, x_2)) \rho - \frac{\Omega^2 \Omega^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} x_1^2 \rho = 0 \quad (7)$$



第1図 軸力を受ける柱

ただし δ は $\delta(x_2|x_1, t)$ を表わす時間に x_1 にあつたものが t 時間に x_2 に移行する遷移確率である。(7) 式に各 $x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2$ をかけて x_1, x_2 の全領域で積分すると次のモーメントに関する式を得る。

一次モーメント (平均値) に関して

$$\dot{E}[x_1] = E[x_2] \quad \dot{E}[x_2] + 2\beta \Omega E[x_2] + \Omega^2 E[x_1](1-\bar{P}_0) + \epsilon E[f(x_1, x_2)] = 0 \quad (8)$$

二次モーメントに関して

$$\left. \begin{aligned} E[x_1^2] - 2E[x_1x_2] &= 0 \quad \dot{E}[x_1x_2] - E[x_1^2] + 2\beta \Omega E[x_1x_2] + \Omega^2(1-\bar{P}_0)E[x_1^2] + \epsilon E[x_1f(x_1, x_2)] \\ E[x_2^2] + 4\beta \Omega E[x_2^2] + 2\Omega^2(1-\bar{P}_0)E[x_1x_2] + 2\epsilon E[x_2f(x_1, x_2)] - \rho^2 \Omega^2 E[x_1^2] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ただし $E[\cdot]$ は数学的平均値である。 x_1, x_2 が Gauss 分布であると仮定すると、(4) 式の $f(x_1, x_2)$ を含む式は、次のようになる。(8), (9) 式において $\epsilon = 1/4$ である。

$$E[f(x_1, x_2)] = 3E[x_1^2]E[x_2] - 2E[x_1^3], \quad E[x_1f(x_1, x_2)] = 3E[x_1^2]^2E[x_1], \quad E[x_2f(x_1, x_2)] = 3E[x_2^2]E[x_1x_2] - 2E[x_1^2]E[x_2^2] \quad (10)$$

Ⅲ. 安定性および不安定後の運動について (平均軸力が座屈荷重以下の場合)

(i) 線形の場合 $\epsilon = 0$ とすると (8), (9) 式は分離できる。線形の場合は (9) 式より Routh-Hurwitz の安定判別から安定条件が求められている。

$$\rho^2 \leq 4\beta \Omega (1-\bar{P}_0) / \Omega \quad (11)$$

ここで、 $\rho^2 = 4\beta \Omega (1-\bar{P}_0) / \Omega$ のとき、 ρ の値を ρ_{cr} とする。(10) 式についての ρ_{cr} と $\bar{P}_0$ との関係を図示したものが第2図である。第3図は、 $\bar{P}_0 = 0$ 、 $\rho = 0.5 \rho_{cr}$ と、 $\rho = 1.5 \rho_{cr}$ について、各々 (9) 式を数値計算した結果を示している。

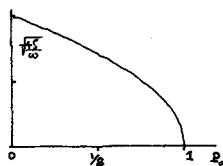
(ii) 非線形の場合 平均軸力が座屈荷重以下であると (8) 式の平均値変動はないのでも $E[x_1] = E[x_2] = 0$ また (9) 式において定常状態になった後について考えると $\dot{E}[x_1^2] = \dot{E}[x_1x_2] = \dot{E}[x_2^2] = 0$ と (9), (10) 式より、次の結果が得られる

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \rho^2 \leq \rho_{cr}^2 \quad E[x_1^2] &= 0 \\ \rho_{cr}^2 < \rho^2 \quad E[x_1^2] &= \Omega \rho^2 / 12\epsilon\beta - (1-\bar{P}_0)/3\epsilon \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

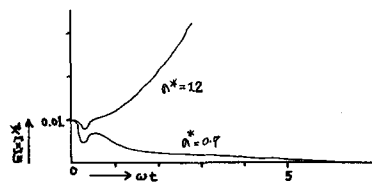
(4) 式は $\rho_{cr} = \rho^*$ 、 $3\epsilon E[x_1^2] = x_1^*$

として第4図に図示した。第5図は $\rho^* = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ について (9) 式を数値計算した結果である。

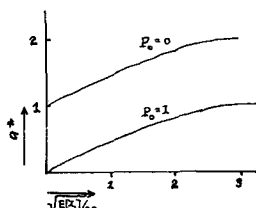
(4) 式の適用限界および、その結果を用いた (4) 式の適用限界については、デジタルシミュレーションにより検討する。さらに x_1 の確率密度関数についてもデジタルシミュレーションの結果より推定する。モーメント方程式とデジタルシミュレーションとの比較については、講演当日発表する。



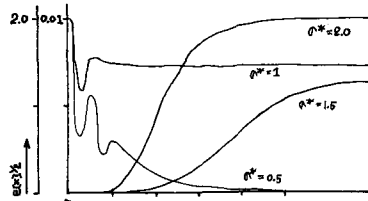
第2図 平均軸力と安定範囲



第3図 系線形の場合の応答



第4図 変位と変動軸力の標準偏差および平均軸力



第5図 非線形の場合の応答

[参考文献] ① "Dynamic Stability of Axially Loaded Columns Subjected to Stochastic Excitations" A. Lepore and C. Shah AIAA, Vol 6 No. 8 ② H. Wirsching and P. Yao "Random Behavior of Columns" ASCE 1971 EM3 ③ T. K. Caughey and J. K. Dienes "The Behavior of Linear Systems with Random Parametric Excitation" Journal of Mathematics and Physics, Vol 41, 1962