

長崎大学工学部 正員 高橋和雄

九州大学工学部 正員 橋本 武

1. 緒言 円板の非線形振動に関しては、既に多くの研究が報告されている^{1)~2)}。しかしながら、これらの研究はいずれも板を一自由度系と仮定しており、多自由度系としての取り扱いや非線形に伴う高調波共振および分数調波共振などの解析は見受けられないようである。そこで、本研究は軸対称変形の仮定のもとに円板の非線形振動を多自由度系として取り扱い、Galerkin法により円板の非線形振動特性を検討せんとするものである。

2. 解法 円板の低次の曲げ振動を対象とすれば、板の面内方向の慣性力、せん断変形および回転慣性の影響を無視することができ、かつ軸対称振動を取り扱うものとすれば、本題の運動方程式は板の有限変形に関する Kármán の式に面外方向の慣性力の項を加えた次式によって与えられる。

$$\nabla^4 F = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad (1), \quad L(w, F) = D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{h}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \rho \omega^2 \Omega^2 t = 0 \quad (2)$$

ここに、 F : Airy の応力関数、 w : 板のたわみ、 E : 板のヤング率、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$; 板剛度、 h : 板厚、 ν : 板のポアソン比、 ρ : 板の密度、 t : 時間、 r : 板の半径方向の座標、 ρ : 外力の荷重強度、 Ω : 外力の円振動数、 $\nabla^4 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \right) \right)$

いま、図-1に示すような円板の中央面の応力成分を σ_r, σ_θ とすれば、これらは応力関数および変位成分を用いて次のように表わされる。

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \nu \frac{u}{r} \right\}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right\} \quad (3) \quad \text{ここに、} u: \text{板の半径方向の変位}$$

$$\text{式(3)から} w \text{の項を消去すれば、面内変位} u \text{が次のように得られる。} \quad u = \frac{r}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \nu \frac{\partial F}{\partial r} \right) \quad (4)$$

板の周辺が単純支持または固定されるものとすれば、その境界条件は次のように表わされる。

$$\text{I(単純支持); } w=0, \quad M_r = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0, \quad \text{II(固定); } w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (5)$$

また、面内方向の変位および応力に関する境界条件として、板周辺で面内変位が拘束される場合と自由の場合を取り扱うものとすれば、式(3)および式(4)より条件式が次のように得られる。

$$\text{(a)(面内変位拘束); } u = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \nu \frac{\partial F}{\partial r} = 0, \quad \text{(b)(面内変位自由); } \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = 0 \quad (6)$$

式(1)および式(2)を解くために板のたわみ w を次のように仮定する。

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) T_n(t) \quad (7) \quad \text{ここに、} R_n(r): \text{座標関数、} T_n(t): \text{時間関数}$$

式(7)の座標関数として、円板の線形曲げ振動の標準関数を用いるものとする。標準関数は既往研究より明らかに、ベキ級数表示のものと Bessel 関数表示のもの2通りがあり次式のとおりである。

$$R_n(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^n \xi^{2(k-1)} \quad (7-a) \quad R_n(r) = A^n \left\{ J_0(\lambda_n \xi) - \frac{J_1(\lambda_n)}{I_1(\lambda_n)} I_0(\lambda_n \xi) \right\} \quad (7-b)$$

ここに、 $a_1^n = 1, a_2^n = \frac{\omega_n^2}{4\lambda_n^2} = 1$ の境界条件よりきまる積分定数、 $a_k^n = \lambda_n^4 / \{ 16(k-1)^2(k-2)^2 \} a_{k-2}^n$ ($k \geq 3$)、 $\lambda_n = \sqrt{\frac{\rho h \omega_n^2}{D}}$

次の振動数方程式より決まる固有値; $\frac{J_1(\lambda_n)}{J_0(\lambda_n)} + \frac{I_1(\lambda_n)}{I_0(\lambda_n)} = \frac{2\lambda_n}{1-\nu}$ (単純支持), $\frac{J_1(\lambda_n)}{J_0(\lambda_n)} + \frac{I_1(\lambda_n)}{I_0(\lambda_n)} = 0$ (固定), ω_n ; 固有円振動数、 $\xi = r/a, A^n = 1/\{ J_0(\omega) - \frac{J_1(\omega)}{I_1(\omega)} I_0(\omega) \}$, J_0, J_1, I_0, I_1 ; Bessel 関数

同じ問題に対する式(7-a)および式(7-b)の両標準関数の使いわけは、式(1)、(2)の微分方程式を解くうえで、いずれが好都合な表現となるかによるものである。式(1)の式形から判断すれば、特解を求める上で式(7-a)を用いることが好ましいといえ、したがって、式(7-a)を式(1)の右辺に代入することになれば、 F に関する次の微分方程式がえられる。

$$\nabla^4 F = -4 \frac{E}{a^4} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} T_k T_l \sum_{j=2}^{\infty} a_j^k a_j^l \{ (i-1)(j-1)(2j-3) \xi^{2(i+j-4)} \} \quad (8)$$

上式を式(6)の境界条件のもとに解けば、 F が次のように求められる。

$$F = -\frac{E}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} T_k T_l \sum_{j=2}^{\infty} a_j^k a_j^l M_{ij} \{ \xi^{2(i+j-2)} - p_{ij} \xi^2 \} \quad (9) \quad \text{ここに、} M_{ij} = (i-1)(2j-3)(j-1) / \{ (i+j-2)^2(i-j-3)^2 \},$$

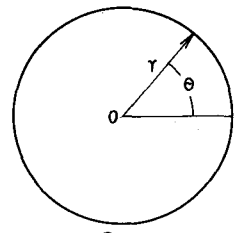


図-1

