

長崎大学工学部 正員〇高橋和雄  
九州大学工学部 正員 横木 武

1. 緒言 円板の非線形振動に関しては、既に多くの研究が報告されている<sup>1)~2)</sup>。しかしながら、これらの研究はいずれも板を一自由度系と仮定しており、多自由度系としての取り扱いや非線形に伴う高調波共振および分数調波共振などの解析は見受けられないようである。そこで、本研究は軸対称変形の仮定のもとに円板の非線形振動を多自由度系として取り扱い、Galerkin法により円板の非線形振動特性を検討せんとするものである。

2. 解法 円板の低次の曲げ振動を対象とすれば、板の面内方向の慣性力、せん断変形および回転慣性の影響を無視することができ、かつ軸対称振動を取り扱うものとすれば、本題の運動方程式は板の有限変形に関するKármánの式に面外方向の慣性力の項を加えた次式によって与えられる。

$$\nabla^4 F = \frac{E}{Y} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - D \nabla^2 w + P \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - p \cos \Omega t = 0 \quad (2)$$

ここに、 $F$ : Airy の応力関数、 $w$ : 板のたわみ、 $E$ : 板のヤング率、 $D = E \kappa^3 / \{12(1-\nu^2)\}$ ;

板剛度、 $\kappa$ ; 板厚、 $\nu$ ; 板のポアソン比、 $\nu$ ; 板の密度、 $\rho$ ; 時間、 $t$ ; 板の半径方向の座標、 $r$ ; 外力の荷重強度、 $p$ ; 外力の円振動数、 $\Omega = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} [r \frac{d}{dr} (r \frac{d}{dr} (\gamma \frac{d}{dr}))]$

いま、図-1に示すような円板の中央面の応力成分を $\sigma_r$ 、 $\sigma_\theta$ とすれば、これらは応力関数および変位成分を用いて次のように表わされる。

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = \frac{E}{1-\nu} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right\}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{E}{1-\nu} \left\{ \frac{u}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right\} \quad (3)$$

式(3)から $w$ の項を消去すれば、面内変位 $u$ が次のように得られる。  $u = \frac{r}{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{p}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) \quad (4)$

板の周辺が単純支持または固定されるものとすれば、その境界条件は次のように表わされる。

$$I(\text{単純支持}); w=0, M_F = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{p}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0, \quad II(\text{固定}); w=0, \frac{\partial w}{\partial r}=0 \quad (5)$$

また、面内方向の変位および応力に関する境界条件として、板周辺で面内変位が拘束される場合と自由の場合を取り扱うものとすれば、式(3)および式(4)より条件式が次のように得られる。

$$(a)(\text{面内変位拘束}); u = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{p}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = 0, \quad (b)(\text{面内変位自由}); \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = 0 \quad (6)$$

式(1)および式(2)を解くために板のたわみ $u$ を次のように仮定する。

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) T_n(t) \quad (7) \quad \text{ここに}, R_n(r); \text{座標関数}, T_n(t); \text{時間関数}$$

式(7)の座標関数として、円板の線形曲げ振動の規準関数を用いるものとする。規準関数は既往研究より明らかのように、ベキ級数表示のものとBessel関数表示のものの2通りがあり次式のことおりである。

$$R_n(r) = \sum_{k=1,2}^{\infty} A_k^n r^{2(k-1)} \quad (7-a) \quad R_n(r) = A^n \left\{ J_0(\lambda_n r) - \frac{J_1(\lambda_n r)}{I_0(\lambda_n r)} I_1(\lambda_n r) \right\} \quad (7-b)$$

ここに、 $A_1^n = 1$ 、 $A_2^n = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^n = 1$  の境界条件よりまる積分定数、 $A_k^n = \lambda_n^4 / \{16(k-1)^2(k-2)^2\} A_{k-2}^n$  ( $k \geq 3$ )、 $\lambda_n = \sqrt{\frac{p \pi^2 r^2}{D}}$

次の振動方程式より決まる固有値： $J_0(\lambda_n r) + \frac{I_1(\lambda_n r)}{I_0(\lambda_n r)} = \frac{2 \lambda_n}{1-\nu}$  (単純支持)、 $J_0(\lambda_n r) + \frac{I_1(\lambda_n r)}{I_0(\lambda_n r)} = 0$  (固定)、 $\omega_n$ ；固

有円振動数、 $\xi = r/a$ 、 $A^n = 1 / \{J_0(\xi) - \frac{I_1(\lambda_n r)}{I_0(\lambda_n r)} I_0(\xi)\}$ 、 $J_0$ 、 $J_1$ 、 $I_0$ 、 $I_1$ ；Bessel 関数

同じ問題に対する式(7-a)および式(7-b)の両規準関数の使いわけは、式(1)、(2)の微分方程式を解くうえで、いずれが好都合な式表現となるかによるものである。式(1)の式形から判断すれば、特解を求める上で式(7-b)を用いることが好ましいといえ、したがって、式(7-a)を式(1)の右辺に代入することにすれば、 $F$ に関する次の微分方程式がえられる。

$$\nabla^4 F = -4 \frac{E}{D} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} T_k T_i \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} A_i^k A_j^l A_{i+j+l-4}^4 (i-1)(j-1)(l-3) \xi^{2(i+j+l-4)} \quad (8)$$

上式を式(6)の境界条件のもとに解けば、 $F$ が次のように求められる。

$$F = -\frac{E}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} T_k T_i \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} A_i^k A_j^l A_{i+j+l-4}^4 \{ \xi^{2(i+j+l-2)} - P_{i+j+l-4} \xi^2 \} \quad (9) \quad \text{ここに}, M_{i,j} = (i-1)(j-3)(l-1) / \{(i+j-2)(l-j-3)^2\},$$

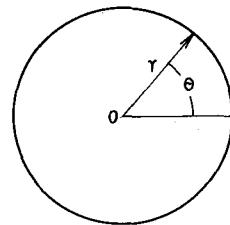


図-1

$$P_{ij} = (i+j-2)(2i+2j-5-\nu) / (1-\nu); \text{ case(a)}, \quad P_{ij} = i+j-2; \text{ case(b)}$$

残された問題は式(9)を式(2)に代入して、時間関数  $T_n(t)$  を決定することであるが、これを直接解くことは困難であるから、Galerkin法による近似解を求ることにする。すなわち

$$\int_0^T L(w, F) R_q(\tau) \tau dt = 0 \quad (10) \quad \text{ここに, } q=1, 2, \dots, R_q(\tau); \text{ ここでは, 式(7-a)よりも式(7-b)を用いる方が好ましく, したがって, 式(7-b)で与えられるものとする。}$$

板の規準関数に関する直交性および  $D^k R_n = P_k h w^2 R_n$  なる関係を用いれば、式(10)に関する Duffing 形の非線形連立微分方程式が次のように求められる。

$$L_q(T_n) = \frac{\ddot{T}_q}{\omega_i^2} + \left( \frac{w_0^2}{\omega_i^2} T_q + \frac{6(1-\nu)}{\nabla_i^2 \lambda_i^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{ijkl} (O_{ijkl} R_{ij}^{m*} - P_{ijkl} R_{ij}^{m*} - N_{ijkl} R_{ij}^{m*}) - \frac{12(1-\nu)}{\nabla_i^2 \lambda_i^2} \frac{P_{0q}}{E h^2} \cos \bar{\omega} t \right) = 0 \quad (11)$$

$$\text{ここに, } \nabla_i^2 = \int_0^T R_i^2 d\tau, R_{ij}^{m*} = \int_0^T \frac{d^m R_i}{d\tau^m} R_j d\tau, S_{ijkl} = \int_0^T \frac{d^2 C_{ijkl}}{d\tau^2} d\tau, \nabla^m = \int_0^T \left[ \frac{d^m R_i}{d\tau^m} + \frac{d^m R_m}{d\tau^m} \right] R_i d\tau, Y_q = \int_0^T R_q d\tau.$$

$$O_{ijkl} = (i+j-2)(i+j-3), \quad P_{ij} = i+j-2, \quad T_q = T_q/h, \quad q=1, 2, \dots, \quad \bar{\omega} = \omega_0 / h,$$

式(11)の外力と同一周期の解を求めるために、定常解  $\bar{T}_q(t)$  を次のように仮定する。

$$\bar{T}_q = \sum_{s=1,3}^{\infty} b_s^s \cos \frac{s \pi \bar{\omega} t}{3} \quad (12) \quad \text{ここに, } b_s^s: \text{未定定数}$$

$$\text{式(12)を式(11)に代入のうえ, 調和バランス法を適用すれば次式を得る。} \quad \int_0^T L_q(T_n) \cos s \pi \bar{\omega} t d\tau = 0 \quad (13) \quad s=1, 3, \dots$$

上式を整理すれば、 $b_s^s$  に関する非線形連立 3 次方程式が得られ、これを Newton-Raphson 法により解けば、 $b_s^s$  を決定することができ、本題が解けることになる。また、式(11)の形の微分方程式には、外力の周波数の 3 倍の周期をもつ振幅成分が卓越する 3 次の分数調波共振が存在することが知られており、これを求めるために、 $\bar{T}_q$  の解を式(12)に加えて次のように仮定し、以下同様の演算をくり返せばよいことになる。  $\bar{T}_q = \sum_{s=1,3}^{\infty} b_s^s \cos \frac{s \pi \bar{\omega} t}{3} \quad (14)$

3. 計算例 ポアソン比  $\nu=0.3$  なる円板を 3 自由度系と仮定すれば、単純支持および固定の各境界条件に対する固有値入力および定数  $\alpha_{ij}^s$  が表-1 に示すように得られる。表-1 の諸値を用いて、式(11)を書きなおせば、本題の運動方程式が次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \ddot{T}_1 + \alpha_{11}^s \dot{T}_1 + \alpha_{111}^s T_1^3 + \alpha_{112}^s T_1^2 T_2 + \alpha_{113}^s T_1 T_2^2 + \alpha_{122}^s T_2^3 + \alpha_{123}^s T_2 T_3^2 + \alpha_{133}^s T_3^3 + \alpha_{222}^s T_2^3 \\ & \ddot{T}_2 + \alpha_{22}^s \dot{T}_2 + \alpha_{221}^s T_2^3 + \alpha_{222}^s T_2^2 = \alpha_{22}^s \frac{P_{0q}}{E h^2} \cos \bar{\omega} t \end{aligned} \quad (15)$$

ここに、 $\alpha_{ij}^s, d_{111}, d_{112}, \dots, d_{133};$  曲げおよび面内の変位、応力の境界条件からきまる定数、 $s=1, 2, 3$

時間関数  $T_q$  について、2 項近似をとれば、  $\bar{T}_q = b_q \cos \bar{\omega} t + C_q \cos 3\bar{\omega} t \quad (16)$

式(16)を式(15)に代入して、式(13)の調和バランス法を適用すれば、 $b_q, C_q$  を決めるための 6 元非線形連立 3 次代数方程式が次のようにえられる。

$$\begin{aligned} (\alpha_{11}^s - \bar{\omega}^2) b_1 + \sum_{i=1}^3 \alpha_{ii}^s (0.75 b_i^3 + 0.75 b_i^2 c_i + 1.5 b_i c_i^2) + \alpha_{12}^s f_{12} + \alpha_{13}^s f_{13} + \alpha_{23}^s f_{23} + \alpha_{23}^s f_{13} + \alpha_{23}^s f_{23} + \alpha_{33}^s f_{33} = \alpha_{11}^s \frac{P_{0q}}{E h^2} \\ (\alpha_{11}^s - 9\bar{\omega}^2) C_1 + \sum_{i=1}^3 \alpha_{ii}^s (0.75 b_i^3 + 1.5 b_i^2 c_i + 0.75 c_i^3) + \alpha_{12}^s g_{12} + \alpha_{13}^s g_{13} + \alpha_{23}^s g_{23} + \alpha_{23}^s g_{13} + \alpha_{23}^s g_{23} + \alpha_{33}^s g_{33} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{ここに, } f_{ijk} = 0.75 b_i b_j b_k + 0.25 (c_i c_j b_k + b_i c_j b_k + b_i b_j c_k) + 0.5 (b_i c_j c_k + c_i b_j c_k + c_i c_j b_k)$$

$$g_{ijk} = 0.25 b_i b_j b_k + 0.5 (b_i c_j c_k + c_i b_j c_k + c_i c_j b_k) + 0.75 c_i c_j c_k, \quad q=1, 2, 3$$

式(17)は適当な  $b_q, C_q$  の初期値のもとに、Newton-Raphson 法の繰り返し計算によって解をうることができ、板の最大振幅は板中央に生じ、次式で与えられる。

$$A_3 = \sum_{i=1}^3 (b_i + C_i) \quad (18)$$

4 種類の境界条件をもつ円板の非線形自由振動について、第 1 次固有振動近傍の振動数と振幅との関係を求めれば図-2 に示すとおりである。図において実線は 3 自由度の解を、点線は 1 自由度の解を示す。

- 参考文献 1) N. Yamaki; Influence of Large Amplitudes on Flexural Vibrations of Elastic Plates, ZAMM, Vol. 41, No. 12, 1961 p501, 2) T. Wah; Vibration of Circular Plates at Large Amplitudes, Proc. ASCE, Vol. 89, No. EM5, 1963, p1

