

長崎大学工学部 正会員 高橋和雄

学生員・小西昭彦

九州大学工学部 正会員 樗木 武

1. まえがき

薄肉弾性ばりの大振幅振動を取り扱う場合には、その運動方程式が非線形微分方程式で表わされる。このため時間関数と座標関数とに変数を分離することや重ね合わせの法則などの線形振動解析に用いられる通常の方法を用いることが困難である。そこで、本問題に関する既往の研究^{1),2)}では座標関数や時間関数またはその両者を適当に仮定して Galerkin 法などによる近似解を求める方法が行われてきた。しかし、これらの解析法でははりなどの連続体を 1 自由度系に仮定したものがほとんどである。このため、仮定した座標あるいは時間関数の適切さいかんでは実際の振動状態を説明しているとはいえず、振幅に伴う振動波形の変化や分岐および高調波共振などの解析なども十分に把握されていない。そこで、本研究では Galerkin 法を用いてはりを多自由度として取扱うことにより、自由振動および定常強制振動の数値解析を行ない従来の方法の妥当性や精度を考察するものである。

2. 解法

問題を簡単にするために次のように仮定する。

a. $l \gg r$

e. 面内保持則が成立つ

b. $\varepsilon \ll 1$ フック則が成立つ

f. 面内方向の慣性力、回転慣性無視

c. $u \ll l$

g. 両端で軸方向変位拘束

d. $y = O(\varepsilon)$

h. 両端で固定または単純支持

記号 l : はりの長さ r : 2 次半径 A : 断面積 I : 断面 2 次モーメント E : ヤング率 ρ : 質量

t : 時間 x : 支点からの距離 y : x 点のたわみ u : 軸方向変位 ξ : 中心軸からの距離

p : 周期外力の振幅 Ω : 周期外力の振動数

以上の仮定に基づいてはりのひずみを求めると、図 1 より

$$\varepsilon_x = \frac{AB' - AB}{AB} - \xi \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - \xi \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\text{よって、ひずみエネルギー: } V = \frac{1}{2} \iiint E \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - \xi \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\}^2 dx dy dz \quad (2)$$

$$\text{運動エネルギー: } T = \frac{\rho A}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \quad (3)$$

$$\text{外力の仕事: } W = \int_0^l p \cos \Omega t \cdot y dx \quad (4)$$

となるから一般化 Lagrangian: $\mathcal{L} = T - V + W$ を作。Hamilton の原理を使うと運動方程式は次のようになる。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{EA}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p \cos \Omega t \quad (5)$$

これを直接解くことは無理だから Galerkin 法を用いて近似解を求める。すなわち時間と空間との変数分離可能として、またはりを多自由度系として解析するために変位 y を次のように仮定する。

$$y = \sum_{i=1}^n X_i(x) \cdot T_i(t) \quad (6)$$

ただし、 X_i : 座標関数、 T_i : 未知の時間関数

$X_i(x)$ として線形曲げ振動の正規関数を用い、はりの中央に対して対称な周期外力を考えると $i = 1, 3,$

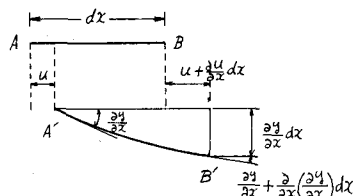


図-1

5, ... の対称成分だけを取り式(6)を式(5)に代入して無次元化を行なうと

$$\mathcal{L}(y) = \sum_{i=1}^{\infty} (\ddot{T}_i + \frac{\lambda_i^4}{\lambda_i^4} \ddot{T}_i) X_i - \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_i^4} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_k T_l T_m \left(\int_0^1 \frac{dX_k}{d\xi} \frac{dX_l}{d\xi} d\xi \right) \frac{d^2 X_m}{d\xi^2} \frac{\bar{P}}{\lambda_i^4} \cos \bar{\Omega} \tau \quad (7)$$

$$\text{ただし, } \lambda_i = l \sqrt{\frac{PA\omega_i^2}{EI}}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_i}, \quad \tau = \omega_i t, \quad \bar{P} = \frac{Pl^4}{EI^4}$$

となる。Galerkinの直交条件を使うと、次のようなTに関する非線形連立常微分方程式が得られる。

$$\ddot{T}_n + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_i}\right)^4 \ddot{T}_n + \alpha_n \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nklm} T_k T_l T_m = \beta_n \bar{P} \cos \bar{\Omega} \tau \quad (n=1, 3, 5, \dots) \quad (8)$$

$$\text{ただし, } \delta_n = \int_0^1 X_n^2 d\xi, \quad \alpha_n = \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_i^4} \frac{1}{\delta_n}, \quad A_{nklm} = - \left(\int_0^1 \frac{dX_k}{d\xi} \frac{dX_l}{d\xi} d\xi \right) \left(\int_0^1 \frac{d^2 X_m}{d\xi^2} X_n d\xi \right), \quad \beta_n = \frac{\bar{P}}{\lambda_i^4} \frac{1}{\delta_n}, \quad \gamma_n = \int_0^1 X_n d\xi$$

この非線形微分方程式に調和バランス法を適用して周期解を求める。外力がCOSの形であり非線形項が3次であることから、解を次のようにフーリエ級数の形に仮定することができる。

$$T_n = \sum_{g=1}^{\infty} b_g^n \cos g \bar{\Omega} \tau \quad (n, g=1, 3, 5, \dots) \quad (9)$$

式(9)を式(8)に代入してCOSの各係数を比較すると連立非線形代数方程式が得られるので、それをNewton-Raphson法の繰返し計算で解けば未知数 b_g^n が求まる。得られた結果を式(6)に代入すればりの任意点における動的変位が得られる。また、分岐調波については非線形項が3次であることから、起振力の3倍の周期を持つ同期成分が卓越することを見越して

$$T_n = \sum_{g=1}^{\infty} b_g^n \cos \frac{g}{3} \bar{\Omega} \tau \quad (n, g=1, 3, 5, \dots) \quad (10)$$

と仮定して同様にする。

3. 計算例

両端単純支持および固定の2種類のはりについて、系を3自由度 $|A|$ 系とし時間に関しては b_1^i, b_3^i, b_5^i の第2高調波まで考慮した数値解析を行なう。各ケースの座標関数は次のとおり与えられる。

$$\text{単純はり} \quad X_i(\xi) = \sin i\pi\xi, \quad i=1, 3, 5$$

$$\text{固定はり} \quad X_i(\xi) = \frac{1}{X_i(0.5)} \left\{ \cos \lambda_i \xi - \cosh \lambda_i \xi - \frac{\cos \lambda_i - \cosh \lambda_i}{\sin \lambda_i - \sinh \lambda_i} (\sin \lambda_i \xi - \sinh \lambda_i \xi) \right\} \quad (11)$$

$$\lambda_1 = 4.730040744$$

$$\lambda_3 = 10.995607838$$

$$\lambda_5 = 17.278759657$$

図-2

また、式(11)を用いてはりの任意の時間における振幅は次のように表わすことができる。

$$y = \sum_{i=1,3,5} X_i (b_1^i \cos \bar{\Omega} \tau + b_3^i \cos 3 \bar{\Omega} \tau + b_5^i \cos 5 \bar{\Omega} \tau) \quad (12)$$

両端単純支持の場合は、 A_{iklm} が $k=l, i=m$ の項のみが値を持ち、非線形項において他の自由度の振動モードが達成しないことが明らかとなり、1自由度系の仮定と同一の運動方程式が得られた。従って、単純はりの非線形振動数は3自由度系による場合と合致し、1自由度系の仮定は適当であることがわかった。また図2では、定常強制振動における応答を求めたもので、実線は強制振動、点線は自由振動の振幅と振動数の関係である。図中において振動数比1付近の共振は b_1^i が卓越する主共振、0.3付近は b_3^i が卓越する第1高調波共振、0.2付近は b_5^i が卓越する第2高調波共振を示す。非線形振動では振幅を一義的に決定することができず振幅の安定、不安定の吟味が必要である。なお両端固定はりでは非線形項において他の自由度が達成するために、多自由度系としての取り扱いが本質的となるが、これについては講演時に発表する予定である。

4. 参考文献 Easley, J. G.: Nonlinear Vibration of Beams and Rectangular Plates, ZAMP, Vol. 15, No. 2 (1964)

2) 佐藤: 両端固定はり及び一端固定、他端単純支持はりの非線形振動, 日本機械学会論文集第31巻, 第259号(1968)