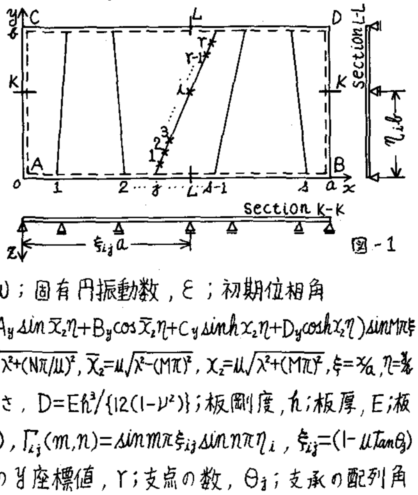
I－10　斜支承を有する連続く形板の振動解析

長崎大学工学部　正会員　高橋和雄
長崎大学工学部　学生員○夏秋義広
九州大学工学部　正会員　樗木　武

1.緒言　平板がスチフナーなどで補強された連続板の固有振動数をあらかじめ予測することは，振動体や移動荷重を受けると考えられる床組の設計に際して極めて重要なことである。従来多くの研究者によって連続板の動的挙動の研究がなされているが，スチフナーが板の辺に対して斜めに配置されるような連続板の振動解析はエネルギー法による近似解法[1]が提案されているのみで未だ十分ではない。そこで，著者らは連続板の振動問題に関する研究を行なっているが，すでにその成果の一部として板の辺に対して平行な補剛材で支持された連続板の振動解析[2]を報告している。つづいて本論文では周辺が単純支持され，中間にて斜めに配置された剛支承で支えられる連続板（図－１参照）を剛支承の代わりに等間隔配列の点支持に置き換えることにより，本題の連続板の固有値算定法を提案するものである。ここでは，著者らの提案する方法の概略を述べ，つづいて2,3の連続板構造について，本法による結果と既往のエネルギー法による結果および実験値と比較，対照などを併せ行うものである。

2.解法　く形板ACDBにおいて，図－１に示すような座標系（x,y,z）を導入する。また，板は周辺の他に辺ABと辺CD間を結ぶs個の剛支承にて支えられており，これらに番号$1,2,\cdots,j,\cdots,s$を付す。く形板が振動すれば，各支承には線状分布をなす垂直反力を生ずるが，これを直接取り扱うことは困難であるから，剛支承の代わりに等間隔に配列されたr個の点支持に置き換えれば，本題の連続板の振動は点支持された無梁板の振動と同一とみなすことができ，板の強制振動に関する微分方程式を解けば，たわみwに関する一般解が次式のように表わされる[3]。



図－1

$w=W\sin(\omega t+\varepsilon)$　　(1)　　ここに，w；板のたわみ，ω；固有円振動数，ε；初期位相角

$$W=(A_x\sin\bar{\chi}_1\xi+B_x\cos\bar{\chi}_1\xi+C_x\sinh\chi_1\xi+D_x\cosh\chi_1\xi)\sin N\pi\eta+(A_y\sin\bar{\chi}_2\eta+B_y\cos\bar{\chi}_2\eta+C_y\sinh\chi_2\eta+D_y\cosh\chi_2\eta)\sin M\pi\xi$$
$$+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{V}_{ij}\Gamma_{ij}(m,n)\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta/K_{mn}\quad(2)$$

$\bar{\chi}_1=\sqrt{\lambda^2-(N\pi/\mu)^2}$，$\chi_1=\sqrt{\lambda^2+(N\pi/\mu)^2}$，$\bar{\chi}_2=\mu\sqrt{\lambda^2-(M\pi)^2}$，$\chi_2=\mu\sqrt{\lambda^2+(M\pi)^2}$，$\xi=x/a$，$\eta=y/b$，$\mu=b/a$，$\lambda=a\sqrt[4]{\rho h\omega^2/D}$（固有値），$a$；板の$x$方向の長さ，$b$；板の$y$方向の長さ，$D=Eh^3/\{12(1-\nu^2)\}$；板剛度，$h$；板厚，$E$；板の弾性係数，$\nu$；板のポアソン比，$\rho$；板の密度，$\bar{V}_{ij}=-4a^2V_{ij}/(\pi^4\mu D)$，$\Gamma_{ij}(m,n)=\sin m\pi\xi_{ij}\sin n\pi\eta_i$，$\xi_{ij}=(1-\mu\tan\theta_j)/2+i\mu\tan\theta_j/(r+1)$，$\eta_i=i/(r+1)$，$a\xi_{ij}$；支点$ij$の$x$座標値，$b\eta_i$；支点$ij$の$y$座標値，$r$；支点の数，$\theta_j$；支承の配列角度，$V_{ij}$；$ij$番目の支点の垂直反力，$M,N=1,2,3,\cdots$，$A_x,B_x,C_x,D_x,A_y,B_y,C_y,D_y$；積分定数，$K_{mn}=\{m^2+(\frac{n}{\mu})^2\}^2-(\frac{\lambda}{\pi})^4$

ところで，本題のく形板は周辺で単純支持されているから，その境界条件は次のように表わされる。

$$\xi=0,1\text{ で}\quad W=0\,,\ \frac{d^2W}{d\xi^2}=0\qquad\qquad \eta=0,1\text{ で}\quad W=0\,,\ \frac{d^2W}{d\eta^2}=0\qquad(3)$$

また，点支持される座標では，板のたわみは零であることから次の拘束条件式がえられる。

$$W(\xi_{ij},\eta_i)=0\qquad(4)$$

式(2)を式(3)および式(4)に代入すれば，未知数$(A_x,B_x,\cdots,A_y,B_y,\cdots,\bar{V}_{11},\bar{V}_{12},\cdots,\bar{V}_{ij},\cdots,\bar{V}_{rs})$を求めるための連立方程式を得るが，未知数のうち少くとも一つが零でない解が存在するためには連立方程式の係数行列式の値が零でなければならないことより，本題の振動数方程式が次のように得られる。

$$\begin{vmatrix}((K_0^1))_{44} & ((0))_{44} & ((0))_{4\cdot rs}\\ ((0))_{44} & ((K_0^2))_{44} & ((0))_{4\cdot rs}\\ ((K_{ij}^1))_{rs\cdot 4} & ((K_{ij}^2))_{rs\cdot 4} & ((H_{ij}))_{rs\cdot rs}\end{vmatrix}=0\qquad(5)$$

ここに，$((K_0^1))_{44}$，$((K_0^2))_{44}$；4行4列の行列，$((0))_{44}$；4行4列の零行列，$((K_{ij}^1))_{rs\cdot 4}$，$((K_{ij}^2))_{rs\cdot 4}$；rs行4列の行列，$((0))_{4\cdot rs}$；4行rs列の零行列，$((H_{ij}))_{rs\cdot rs}$；rs行rs列の行列

なお，式(5)を計算するに当って，これを直接解く代わりに式(6)，式(7)の3つに分けて解くことが実用上好都合である。

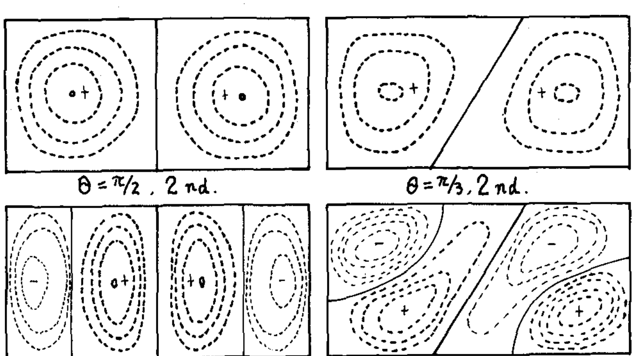
$|((K_0^1))_{4\cdot4}|=0$, $|((K_0^2))_{4\cdot4}|=0$ (6) $|((H_{ij}))_{rs\cdot rs}|=0$ (7)

ここで，式(6)の解は周辺単純支持く形板の固有値で式(5)の必要条件であるが十分条件ではなく，これより得られる固有値群の中には本題の固有値として不要なものも含まれているので注意を要する。式(7)から得られる固有値は全て式(5)の固有値であり，本例の固有値は垂直反力の項より独立に算定される。

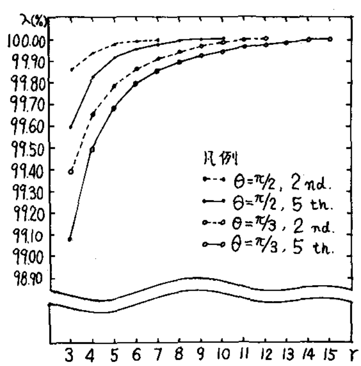
3.計算例　図－1において，辺長比μ=1/2なる周辺単純支持く形板が一本の剛支承にて支えられる2スパン連続板について，本法により固有値および振動モードを求めれば次のとおりである。なお，支承の配列角度は$\pi/2$または$\pi/3$とし支承の中央が板の中央に合致するものとする．剛支承を置換する点支持の個数については収束計算を行なった．すなわち，点支持の個数を順次増加させていき，得られた固有値の小数3桁目が収束する固有値を本題の固有値とみなした。得られた固有値を5次まで示せば表－1の結果をうる。表－1において，右肩に＊印を付した固有値は式(6)から得られたことを明らかにし，また＊印のない固有値は式(7)から得られたことを示すものである．なお( )内の数値は収束に要した支点の数である。$\pi/2$の場合には既往の方法[2]により厳密解が得られており，また$\pi/2$および$\pi/3$の場合にはエネルギー法による結果および実験値が報告[1]されているが，比較，対照のためこれらを併記すれば表-1のとおりである．表-1より，$\pi/2$の場合には本法が厳密解と極めてよく合致しており，本法が連続板の固有値の算定に有効であることが立証され，かつエネルギー法による結果および実験値も厳密解と良好な一致を示しているようである。次に$\pi/3$の場合についても本法がエネルギー法および実験値とよく合致していることが分かる。固有値が明らかとなれば振動モードが算出可能となる．表－1に示す固有値のうち，2次と5次の固有値の振動モードを示せば図－2に示すとおりである。最後に図－3は支点の数と固有値の収束の関係を示したものである。

θ	次数	1 st.	2 nd.	3 rd.	4 th.	5 th.
$\frac{\pi}{2}$	本　法	8.8857*	9.725(7)	14.3772*	14.3772*	15.318(10)
	厳密解	8.8857*	9.7260	14.3772*	14.3772*	15.3180
	エネルギー法	8.89	9.82	14.07	14.27	14.69
	実験値	9.28	10.3	14.3	14.4	15.7
$\frac{\pi}{3}$	本　法	9.351(12)	9.966(12)	13.752(8)	14.264(13)	15.107(15)
	エネルギー法	9.46	10.07	13.99	14.54	15.36
	実験値	9.76	10.5	13.7	14.9	16.0

表－1



図－2



図－3

4.結語　本研究は斜めに配置された剛支承で支持されたく形板の固有値を有限個の点支承で置き換えて求める近似解法を提案したものであるが，本法が十分な精度の解を与えることが明らかになった．さらに，支承の角度が小さくなった場合や精度に対する詳細な検討は講演時に発表の予定である。最後に，エネルギー法による計算値および実験値を提供された航空宇宙技術研究所の林洋一氏に深く感謝の意を表するものである。

参考文献　1)林・川井；連続板の振動について，第15回構造強度に関する講演会講演集，昭和48年，2)山崎・樗木・高橋；応力法による一方向連続く形板の自由振動，九州大学工学集報，第42巻，第5号，昭和44年10月，3)，樗木・高橋；周辺単純支持直交異方性無梁板構造の自由振動，長崎大学工学部研究報告，第2号，昭和46年12月