

九州大学 工学部 正員 小坪 清真
九州工業大学 正員 〇高 西 照 彦

1. まえがき

地中構造物の地震応答を求めるとき、地盤と構造物とを一体として厳密に解析することは一般に困難である。現在一つの行き方として、構造物を中心に考えて地盤をバネに置換し、そのバネに振動数特性を附与して、これによって地盤と構造物の動的相互作用を評価して構造物の地震応答を求めようとする考え方がある。このような考え方で構造物の地震応答を求めようとするとき、地下に根入れのない構造物の場合には別に問題はないが、地下に根入れのある構造物の場合には、たとえ地盤のバネ定数の振動数特性を正しく評価したとしても、さらにその根入れ部分の容積によって排除された土の質量が構造物の地震応答に及ぼす影響の度合いがどの程度であるかを見積ることが必要になってくる。本論は排除土が地中構造物の地震応答に及ぼす影響を調べる目的で、地盤と構造物を一体として厳密に解析できる系(図-1)を取上げて、地盤のバネ定数の厳密な振動数特性を求め、その値を用いて (i) 図-1 においてケーソン基礎が存在しないときの地盤の地震応答変位を採用した場合(近似解 case 1) (ii) 図-1 においてケーソン基礎を取去ってそのあとをそのまま空に保つた状態の地盤の地震応答変位を採用した場合(近似解 case 2) の二通りの場合について、それぞれ地中構造物の地震応答を計算し、地盤-構造物系を一体として解析した場合(厳密解)と上記の値とを比較して、排除土が構造物の地震応答に及ぼす影響を理論的に明らかにしたものである。一般の地中構造物の地震応答計算値に対して、地盤と構造物の動的相互作用を考慮した解析法によってその地震応答を求める場合でも、地盤のK値を一定として応答計算をする場合でも、排除土の質量が構造物の地震応答値に及ぼす影響の度合いはいずれの方法によっても変わらないと考えられるので、本論で得られた結論は一般性を有するといえる。

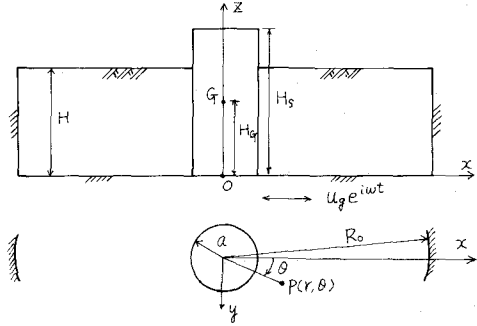


図-1 地中構造物(ケーソン基礎)

2. 解析上の仮定及び諸条件

地中構造物として図-1に示すような円柱形のケーソン基礎を取上げて、このケーソン基礎が同図に示すように剛な基盤上にあって、単一の有限な領域で囲まれた弾性表層地盤中に設置されており、この系が基盤から水平方向正弦波入力 $u_g e^{i\omega t}$ を受ける場合を考える。以下に解析上の仮定及び諸条件を列挙すれば次の通りである。(i) ケーソン基礎は剛体とする。(ii) 表層地盤においては上下方向変位を無視する。(iii) 減衰は一切考慮しない。(iv) 地盤変形については地表面においてせん断応力 $\tau_{\theta r}$, $\tau_{z\theta}$ のみが0となる解を導く。(v) ケーソンは図-1に示す0点を通るy軸のまわりのロッキング振動のみを行う。(vi) その際基盤からの反力は考慮しない。(vii) 外側境界では地盤の変位は0とする。(viii) 本論では定常振動のみを取扱う。

3. 表層地盤の運動方程式及びその解

図-1に示すように、基盤がx方向に $u_g e^{i\omega t}$ で振動するとき、表層地盤の運動方程式は円筒座標を用いて

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\} - \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\} = \frac{\rho_s}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\rho_s}{r} \omega^2 u_g \cos \theta e^{i\omega t} \quad (1)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\} + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\} = \frac{\rho_s}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\rho_s}{r} \omega^2 u_g \sin \theta e^{i\omega t} \quad (2)$$

ここに、 u, v は地盤の r, θ 方向の相対水平変位、 λ, μ はラーメの定数、 ρ_g は上層地盤の単位体積重量、 g は重力の加速度である。地表面で $z=r=z_0=0$ とする解は、上層地盤が無限の広がりをもつ場合については田治見⁽¹⁾ によって与えられているので、これを参照すれば上記の運動方程式の解は次のように書くことができる。

$$u = \sum_{n=1,3,5,\dots} U_n(r) \sin \frac{n\pi z}{2H} \cos \theta e^{i\omega t} \dots\dots\dots (3), \quad v = \sum_{n=1,3,5,\dots} V_n(r) \sin \frac{n\pi z}{2H} \sin \theta e^{i\omega t} \dots\dots\dots (4)$$

$$U_n(r) = A_n \left\{ \frac{1}{r} I_0(\alpha_p r) - \alpha_p I_0(\alpha_p r) \right\} + B_n \left\{ \frac{1}{r} K_0(\alpha_p r) + \alpha_p K_0(\alpha_p r) \right\} + C_n \frac{1}{r} I_0(\alpha_s r) + D_n \frac{1}{r} K_0(\alpha_s r) + \frac{\kappa_n}{\pi n} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \frac{u_g}{\xi_n} \dots\dots\dots (5)$$

$$V_n(r) = A_n \frac{1}{r} I_1(\alpha_p r) + B_n K_1(\alpha_p r) + C_n \left\{ \frac{1}{r} I_1(\alpha_s r) - \alpha_s I_0(\alpha_s r) \right\} + D_n \left\{ \frac{1}{r} K_1(\alpha_s r) + \alpha_s K_0(\alpha_s r) \right\} - \frac{\kappa_n}{\pi n} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \frac{u_g}{\xi_n} \dots\dots\dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに、} \quad \nu_p^2 &= (\lambda + 2\mu)g/\rho_g, \quad \nu_s^2 = \mu g/\rho_g, \quad \omega_g = \frac{\pi}{2H} \nu_s, \quad \xi_n = \sqrt{n^2 - (\omega/\omega_g)^2} \\ \alpha_p &= \xi_n \omega_g / \nu_p, \quad \alpha_s = \xi_n \omega_g / \nu_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

また、上層地盤の応力は u, v が既知のときは次式から求められる。

$$\sigma_r = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \dots\dots\dots (8)$$

4. ケーソン基礎の運動方程式及びその解

a. 厳密解 O 点を通る y 軸のまわりにロッキング振動をするケーソン基礎の運動方程式は次式で表わされる。

$$\frac{I}{g} \ddot{\phi} = \frac{W}{g} u_g \omega^2 H_g e^{i\omega t} + M \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 I はケーソン基礎の O 点を通る y 軸まわりの慣性モーメント、 W はケーソンの重量、 ϕ はケーソンの回転角、 H_g はケーソンの重心高さ、 M はケーソン基礎の側面に作用する地盤の応力による回転軸まわりのモーメントで、次式から求められる。

$$M = \int_0^H \left\{ \int_0^{2\pi} (\sigma_r |_{r=a} \cos \theta - \tau_{r\theta} |_{r=a} \sin \theta) a d\theta \right\} z dz \dots\dots\dots (10)$$

(3), (4), (9) の各式を用いて、次の境界条件を満足するように (5), (6) 式の係数 A_n, B_n 等を定めればケーソン基礎の変位応答を求めることができる。(i) $r=a$ においてケーソンと地盤の変位は等しい。(ii) $r=R$ において地盤の変位は 0 である。結果のみを示せば、ケーソン基礎の天端の絶対変位の基盤のそれに対する応答倍率 L は次のように表わされる。

$$L_0 = \frac{\phi_0 H_s + u_g}{u_g} = 1 + \frac{\frac{W}{g} H_g H_s + \frac{16 \rho_g a^2 H^2 H_s}{\pi^2 g} \Omega_0 h}{-\frac{I}{g} + \frac{32 \rho_g a^2 H^2}{\pi^2 g} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \Omega_0 f} \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 ϕ_0 はケーソンの回転角、 H_s はケーソンの高さである。また、 f, h, Ω_0 は次式に示す通りである。

$$f = \sum_{n=1,3,5,\dots} \xi_n^2 \frac{\Omega_{n2}}{\pi^2} / \Omega_0, \quad h = \sum_{n=1,3,5,\dots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Omega_{n1}}{\pi^2} / \Omega_0, \quad \Omega_0 = \left[\sum_{n=1,3,5,\dots} \xi_n^2 \frac{\Omega_{n2}}{\pi^2} \right]_{\omega=0} \dots\dots\dots (12)$$

$$\Omega_{ni} = -A_{ni} I_1(\alpha_p a) - B_{ni} K_1(\alpha_p a) + C_{ni} I_1(\alpha_s a) + D_{ni} K_1(\alpha_s a), \quad (i=1,2) \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 A_{ni} 等は上記 (i), (ii) の境界条件から定まる定数で、次の連立方程式の解である。行列表示すれば

$$\begin{aligned} \alpha A_1 &= \beta_1 \dots\dots\dots (14), & \alpha &= \begin{bmatrix} I_1(\alpha_p a) & K_1(\alpha_p a) & I_1(\alpha_s a) & K_1(\alpha_s a) \\ -\alpha_p a I_0(\alpha_p a) & +\alpha_p a K_0(\alpha_p a) & -\alpha_s a I_0(\alpha_s a) & +\alpha_s a K_0(\alpha_s a) \\ I_1(\alpha_p a) & K_1(\alpha_p a) & I_1(\alpha_s a) & K_1(\alpha_s a) \\ I_1(\alpha_p R_0) & K_1(\alpha_p R_0) & I_1(\alpha_s R_0) & K_1(\alpha_s R_0) \\ -\alpha_p R_0 I_0(\alpha_p R_0) & +\alpha_p R_0 K_0(\alpha_p R_0) & -\alpha_s R_0 I_0(\alpha_s R_0) & +\alpha_s R_0 K_0(\alpha_s R_0) \\ I_1(\alpha_p R_0) & K_1(\alpha_p R_0) & I_1(\alpha_s R_0) & K_1(\alpha_s R_0) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (18) \\ \alpha A_2 &= \beta_2 \dots\dots\dots (15), \\ A_i &= \{A_{ni} \ B_{ni} \ C_{ni} \ D_{ni}\}^T \\ (i &= 1, 2) \dots\dots\dots (16) \\ \beta_1 &= \{-1 \ 1 \ -R_0/a \ R_0/a\} \\ \beta_2 &= \{-1 \ 1 \ 0 \ 0\} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

b. 近似解 Case 1 ケーソンが存在しないときの地盤の変位応答は (3), (4) 式において $U_n(r), V_n(r)$ の代りに $U_n^*(r), V_n^*(r)$ とすれば次式のように表わせる。

$$U_n^*(r) = A_n^* \left\{ \frac{1}{r} I_1(\alpha_p r) - \alpha_p I_0(\alpha_p r) \right\} + C_n^* \frac{1}{r} I_1(\alpha_s r) + \frac{4}{\pi \pi} \left(\frac{w}{w_g} \right)^2 \frac{U_g}{\xi_m^2} \quad (19)$$

$$V_n^*(r) = A_n^* \frac{1}{r} I_1(\alpha_p r) + C_n^* \left\{ \frac{1}{r} I_1(\alpha_s r) - \alpha_s I_0(\alpha_s r) \right\} - \frac{4}{\pi \pi} \left(\frac{w}{w_g} \right)^2 \frac{U_g}{\xi_m^2} \quad (20)$$

未定係数 A_n^* , B_n^* は次の境界条件から定めればよい。すなわち, $r = R_0$ において $u = v = 0$ 。

ケーソン基礎の変位応答を求めるには a の場合と同様にして, (10)式から外力モーメント M を求め, これを (9) 式に代入すればよいが, ただそのとき M の計算に必要な地盤の変位 u , v は (19), (20) 式を用いて求めなければならぬ。結果を変位の応答倍率で示せば次の通りである。

$$L_1 = \frac{q_0 H_s + U_g}{U_g} = 1 + \frac{\frac{w}{g} H_g H_s + \frac{16 g_2 a^2 H^2 H_s}{\pi^2 g} \Omega_0 h^*}{-\frac{1}{g} + \frac{32 g_2 a^2 H^2}{\pi^2 g} \left(\frac{w_g}{w} \right)^2 \Omega_0 f} \quad (21)$$

$$\text{ここに, } h^* = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\bar{U}^* \Omega_{m2}}{m^3} \dots\dots\dots (22), \quad \bar{U}_n^* = A_n^* \left\{ I_1(\alpha_p a) - \alpha_p a I_0(\alpha_p a) \right\} + C_n^* I_1(\alpha_s a) + 1 \dots\dots\dots (23)$$

また, A_n^* , C_n^* は境界条件から定まる定数で

$$\Delta = \frac{2 I_1(\alpha_p R_0) - \alpha_p R_0 I_0(\alpha_p R_0)}{2 I_1(\alpha_s R_0) - \alpha_s R_0 I_0(\alpha_s R_0)}, \quad \psi = I_1(\alpha_p R_0) - \alpha_p R_0 I_0(\alpha_p R_0) - I_1(\alpha_s R_0) \cdot \Delta$$

とかけば A_{n1}^* , C_{n1}^* は次式によって与えられる。

$$A_{n1}^* = - \frac{(R_0/a)}{\psi}, \quad C_{n1}^* = \frac{(R_0/a) \cdot \Delta}{\psi} \quad (24)$$

C. 近似解 case 2 ケーソンを取去ってそのあとをそのまま空に保った状態での地盤の変位応答は (3), (4), (5), (6) の各式を用いて求めることができる。ただそのとき未定係数 A_n 等を A_n^{**} 等と書くことにすれば, A_n^{**} 等は次の境界条件から定めなければならぬ。(i) $r = a$ において $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$ 。(ii) $r = R_0$ において $u = v = 0$ 。あとは b での所論と全く同様にして, この場合のケーソン基礎の変位応答を求めることができる。結果を変位の応答倍率で示せば次の通りである。

$$L_2 = \frac{q_0^{**} H_s + U_g}{U_g} = 1 + \frac{\frac{w}{g} H_g H_s + \frac{16 g_2 a^2 H^2 H_s}{\pi^2 g} \Omega_0 h^{**}}{-\frac{1}{g} + \frac{32 g_2 a^2 H^2}{\pi^2 g} \left(\frac{w_g}{w} \right)^2 \Omega_0 f} \quad (25)$$

$$\text{ここに, } h^{**} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\bar{U}^{**} \Omega_{m2}}{m^3} \quad (26)$$

$$\bar{U}^{**} = A_n^{**} \left\{ I_1(\alpha_p a) - \alpha_p a I_0(\alpha_p a) \right\} + B_n^{**} \left\{ K_1(\alpha_p a) + \alpha_p a K_0(\alpha_p a) \right\} + C_n^{**} I_1(\alpha_s a) + D_n^{**} K_1(\alpha_s a) + 1 \quad (27)$$

A_n^{**} 等は上述のように境界条件 (i), (ii) から定まる定数で, 次の連立方程式の解である。これを行列表示すれば

$$\alpha^{**} A_1^{**} = \beta_1 \dots\dots\dots (28), \quad A_1^{**} = \{ A_{n1}^{**} \ B_{n1}^{**} \ C_{n1}^{**} \ D_{n1}^{**} \}^T \dots\dots\dots (29)$$

$$\alpha^{**} = \begin{bmatrix} (\alpha_s^2 a^2 + 4) I_1(\alpha_p a) & (\alpha_s^2 a^2 + 4) K_1(\alpha_p a) & 4 I_1(\alpha_s a) & 4 K_1(\alpha_s a) \\ -2 \alpha_p a I_0(\alpha_p a) & +2 \alpha_p a K_0(\alpha_p a) & -2 \alpha_s a I_0(\alpha_s a) & +2 \alpha_s a K_0(\alpha_s a) \\ 4 I_1(\alpha_p a) & 4 K_1(\alpha_p a) & (\alpha_s^2 a^2 + 4) I_1(\alpha_s a) & (\alpha_s^2 a^2 + 4) K_1(\alpha_s a) \\ -2 \alpha_p a I_0(\alpha_p a) & +2 \alpha_p a K_0(\alpha_p a) & -2 \alpha_s a I_0(\alpha_s a) & +2 \alpha_s a K_0(\alpha_s a) \\ I_1(\alpha_p R_0) & K_1(\alpha_p R_0) & I_1(\alpha_s R_0) & K_1(\alpha_s R_0) \\ -\alpha_p R_0 I_0(\alpha_p R_0) & +\alpha_p R_0 K_0(\alpha_p R_0) & -\alpha_s R_0 I_0(\alpha_s R_0) & +\alpha_s R_0 K_0(\alpha_s R_0) \\ I_1(\alpha_p R_0) & K_1(\alpha_p R_0) & I_1(\alpha_s R_0) & K_1(\alpha_s R_0) \end{bmatrix} \quad (30)$$

なお, β_1 は (17) 式に示してある。

5. 数値計算結果及び考察

数値計算は一例として、ケーソンについては半径 $a=15^m$ 、高さ $H_s=36^m$ 、重心高さ $H_g=18^m$ 、単位体積重量 $\rho_s=2.4 \text{ t/m}^3$ 、上層地盤については厚さ $H=30^m$ 、単位体積重量 $\rho_g=1.8 \text{ t/m}^3$ 、弾性定数 $E=5000 \text{ t/m}^2$ 、せん断弾性定数 $G=2000 \text{ t/m}^2$ したがってポアソン比 $\mu=0.25$ 、外側境界半径 $R_o=150^m$ の場合について、それぞれ (11), (21), (25) の各式で表わされる変位応答倍率の絶対値 $|L|$ を $\omega/\omega_g = 0 \sim 2.4$ の範囲に対して求めた。図-2 にその計算結果を示す。同図は横軸に入力波の円振動数 ω に対する厚さ H の無限地盤の ω 1 次の固有円振動数 ω_g の比をとり、縦軸にはケーソン天端の絶対変位に対する基盤の変位の比の絶対値をとって、それぞれ厳密解 $|L_o|$ 、近似解 case 1 $|L_1|$ 、近似解 case 2 $|L_2|$ をプロットしたものである。図から $\omega/\omega_g \leq 1$ のときには三者の値は図上ではほとんど互に区別できない位である。 $\omega/\omega_g > 1$ のときには三者の間に差異が生じて、 ω/ω_g が 1 より大きくなるに従ってその差が増大する傾向を示す。しかし一般に、case 2 の方がより厳密解に近いといえる。各場合に対するケーソン天端の変位の応答倍率の差異は、 L_o, L_1, L_2 の表式から明らかなように h, h^*, h^{**} によって左右される。 h は上層地盤の変位がケーソンの側面に及ぼす力のモーメントの振動数による変化を表わす項である。図-3 に ω/ω_g に対する f, h, h^*, h^{**} の値の変化の様子を示す。当然のことながら、 h^*, h^{**} の h に対する差異と $|L_1|, |L_2|$ の $|L_o|$ に対する差異とはその傾向が全く一致している。 h, h^*, h^{**} の値を決める factor は結局 $a/H, R_o/H$ 及び地盤のポアソン比 μ の 3 つであるから、これらの値をパラメータとして h, h^*, h^{**} の値の変化を調べれば、どの factor が構造物の変位応答に大きな影響を与えるかが判ることになる。上記のパラメータの種々の値に対する計算結果については講演時に発表する予定である。本論では簡単のため考慮しなかったが、実際の地中構造物についてみれば、波動によるエネルギーの地下伝散にもとづく減衰その他の現象のため、構造物の高次の共振が顕著に生じない場合が多い。したがって低次の共振卓附近までにかぎって考えれば、本論における一計算例からだけでも排除上の質量が構造物の地震応答に及ぼす影響はかなり小さいということがわかる。

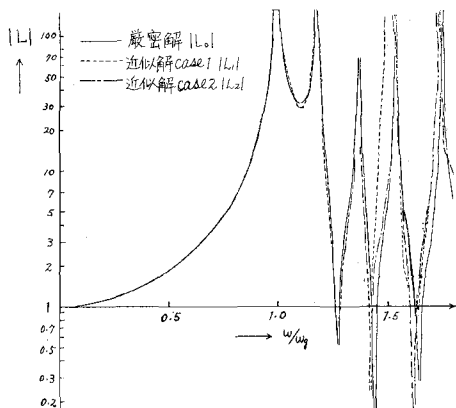


図-2 ケーソン天端の変位の共振曲線

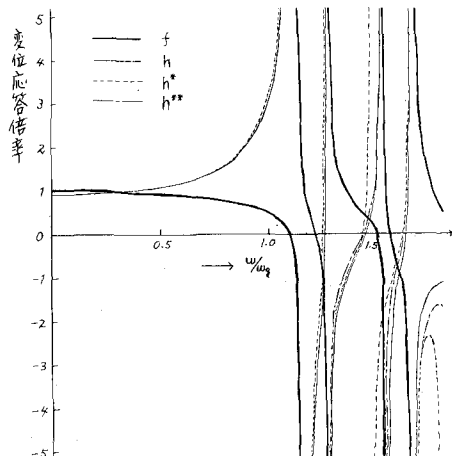


図-3 f, h, h^*, h^{**} の振動数特性